

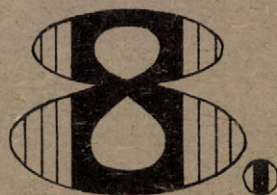
55807

2289

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

1972 DEC-9

KÖZLEMÉNYEK



1972. MÁRCIUS

74

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

KÖZLEMÉNYEK

8.

Budapest, 1972. március

Szerkesztőbizottság:

ARATÓ MÁTYÁS (felelős szerkesztő)
DÁVID GÁBOR, FISCHER JÁNOS, GEHÉR ISTVÁN,
GERGELY JÓZSEF, GERTLER JÁNOS, MOLNÁR IMRE,
PRÉKOPA ANDRÁS, TANKÓ JÓZSEF

Felelős kiadó:

Dr. VAMOS TIBOR

igazgató

Technikai szerkesztő:

MESZLÉNYI MÁRIA

MTA Számítástechnikai Központja
Budapest, I. Uri u. 49.

SZIMULÁCIÓS EREDMÉNYEK AZ ELEMI GAUSS FOLYAMAT PARAMÉTEREI BECSLÉSEINEK ELOSZLÁSÁRA

Arató Mátyás – Benczur András

BEVEZETÉS

A dolgozatban megvizsgáljuk a stacionárius Gauss-Markov folyamat $m = M\xi(t)$ és λ ($M [(\xi(t) - m)(\xi(t + \tau) - m)] = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|\tau|}$) paraméterei különböző becsléseinek viselkedését Monte-Carló módszerrel.

Az Arató-Benczur [1] (lásd még Benczur [1]) táblázatai alapján lehetőség van ($m = 0$ esetén) az időben folytonos eset maximum likelihood becslése és a 2. §. (2.1) – (2.5) becsléseinek összehasonlítására. Az I.1 – I.6 táblázatok megadják $T = 20, 60, 100$ megfigyelés esetén az empirikus eloszlások $p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95$ kvantiliseit. Figyelemre méltó a statisztikai irodalomban nem használt

$$(2.4) \quad \hat{\lambda}_4 = \frac{T + 1}{2 \sum_{i=0}^T \xi_i^2}$$

becslés eloszlása kvantiliseinek jó egyezése a λ_p (elméleti úton nyert) oszlop kvantiliseivel.

A 3 §. táblázataiban a (3.1) – (3.3) becslések eloszlásainak kvantiliseit adjuk meg. A II. táblázat m becsléseinek átlagát és szórását adja meg. Az m különböző becslései azonosan viselkednek és szórásuk közel van az elméletileg adódó $\frac{1}{2\lambda}$ értékhez (de nem az $\frac{1}{2\tilde{\lambda}}$ értékhez). A λ paraméter becsléseiből nem adódnak alsó konfidencia határok, mivel tetszőleges $\tilde{\lambda}$ becslésre adott p esetén λ -tól függetlenül létezik olyan x_p , hogy

$$\sup_{\lambda > 0} P_{\lambda, m} \{ \tilde{\lambda} > x_p \} \geq p.$$

Az x_p értékek numerikus meghatározása csak a (3.3) becslések esetén sikerült elméleti úton. A III. táblázatok megadják a p ($p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95$) kvantilisek viselkedését λ függvényében.

Az empirikus eloszlásfüggvényeket 100-as mintákra határoztuk meg. Egy λ, T értékpárhoz 10-20 ilyen empirikus eloszlásfüggvényt számoltunk ki. A program leírását a 4. §-ban adjuk meg. Adott paraméterérték és kiinduló véletlen szám esetén a program 1-2 perc időtartam alatt fut le (CDC 3300-as típusú gépen).

1. §. A LIKELIHOOD FÜGGVÉNY

A $\xi(t)$ időben folytonos stacionárius, Gauss-Markov folyamat az $M\xi(t) = m$, $M(\xi(t) - m) \cdot (\xi(t + \tau) - m) = \sigma^2 \cdot e^{-\lambda|\tau|}$ összefüggésekben szereplő m , σ^2 , λ paraméterekkel jellemezhető (m tetszőleges valós, $\lambda > 0$). Ismeretes, hogy a $\sigma_{\xi}^2 = 2\lambda\sigma^2$ paraméter a $\xi(t)$, $0 \leq t \leq T$ folyamat egy realizációjából 1 valószínűséggel becsülhető (Baxter tétele). A folyamatot jellemző két paraméternek a λ és m mennyiségeket tekintjük, mivel a

$$(1.1) \quad t = t' \cdot T, \quad \xi(t) = \xi(t') \cdot \sigma_{\xi} \cdot \sqrt{T}$$

leképezéssel az általános feladatot a $\sigma_{\xi} = 1$ és $T = 1$ esetre vezethetjük vissza. A továbbiakban ezért a realizációkat mindig a $[0, 1]$ intervallumban vizsgáljuk. A két paraméter együttes becslése eloszlása megvizsgálását Kolmogorov vetette fel 1948-ban Jerevánban. Részbeni megoldást – amikor is egyetlen ismeretlen paraméter van – adnak Arató [1], [2], valamint Benczúr [1] és Arató-Benczúr [1] cikkei.

Az időben folytonos folyamatról jólismert, hogy kielégíti a

$$d\xi(t) = -\lambda\xi \cdot dt + d\bar{\epsilon}(t)$$

sztochasztikus differenciálegyenletet.

A továbbiakban szükségünk van a következő tételre:

1. Tétel: A $\xi(n)$ reguláris folyamat akkor és csak akkor stacionárius Gauss-Markov típusú, ha kielégíti a

$$(1.2) \quad \xi(n) = \rho\xi(n-1) + \epsilon(n)$$

differencia egyenletet, ahol $\epsilon(n)$ egy független Gauss sorozat.

Az 1. Tétel alapján az időben folytonos folyamat diszkrét $\xi(n\Delta)$ megfigyelései, ($\Delta > 0$ és $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), kielégítik a (2) összefüggést, ahol

$$\rho = e^{-\lambda \cdot \Delta}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{2\lambda}, \quad \sigma_{\epsilon}^2 = \frac{(1 - e^{-2\lambda \cdot \Delta})}{2\lambda}.$$

A (2) összefüggés módot nyújt az időben folytonos folyamat pontos imitálására számológépen.

A $\xi(t)$, $0 \leq t \leq 1$ realizációk terén értelmezett $P_{\lambda, m}$ Gauss-Markov mérték, valamint a $V = L \times W$ standard mérték, ahol L a Lebesgue, W pedig a feltételes Wiener mérték Radon – Nikodym deriváltja (lásd Arató [2])

$$(1.3) \quad \frac{dP}{dV}(\xi(t)) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} [(\xi(0) - m)^2 + (\xi(1) - m)^2 - 1 + \lambda \int_0^1 (\xi(s) - m)^2 ds] \right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} [\xi^2(0) + \xi^2(1) + \lambda \int_0^1 \xi^2(s) ds - 2m(\xi(0) + \xi(1) + \lambda \int_0^1 \xi(s) ds) + \right. \\ \left. + m^2(1 + \lambda) - 1] \right\} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} \left[\frac{(\xi(1) - \xi(0))^2}{2} - 1 + \lambda \int_0^1 (\xi(s) - \int_0^1 \xi(s) ds)^2 ds + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left(m - \frac{\xi(0) + \xi(1)}{2} \right)^2 + \lambda \left(m - \int_0^1 \xi(s) ds \right)^2 \right] \right\}.$$

Az időben diszkrét ξ_1, \dots, ξ_n realizáció sűrűségfüggvénye

$$(1.4) \quad p(x_1, \dots, x_n) = (2\pi\sigma)^{-n} (1 - \rho^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\xi^2(1 - \rho^2)} [(x_1 - m)^2 (1 - \rho^2) + \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^n (x_i - \rho x_{i-1} - m(1 - \rho))^2] \right\} = (2\pi\sigma)^{-n} (2\pi\sigma)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} [(x_1 - \right. \\ \left. - m)^2 (1 - \rho^2) + \sum_{i=2}^n (x_i - \rho x_{i-1} - m(1 - \rho))^2] \right\}.$$

A (3) és (4) összefüggésekből az m, λ (ill. m, ρ) paraméterek maximum likelihood becslésére a következő egyenleteket kapjuk:

$$(1.5) \quad \frac{1}{2\lambda} - (s_1^2 - 1/2) - \lambda s_2^2 - (m - m_1)^2 - \lambda(m - m_2)^2 = 0, \\ 2(m - m_1) + \lambda(m - m_2) = 0,$$

ahol

$$m_1 = \frac{\xi(0) + \xi(1)}{2}, \quad m_2 = \int_0^1 \xi(s) ds, \quad s_1^2 = \frac{1}{4} (\xi(1) - \xi(0))^2, \quad s_2^2 = \int_0^1 (\xi(s) - \int_0^1 \xi(t) dt)^2 ds.$$

Az (5) egyenletek alapján az $\hat{m}, \hat{\lambda}$ becslések között a következő összefüggések adódnak:

$$(1.5') \quad \hat{m} = \frac{2m_1 + \hat{\lambda}m_2}{2 + \hat{\lambda}}, \\ (2 + \hat{\lambda})^2 - 2\hat{\lambda}(2 + \hat{\lambda})^2(s_1^2 - 1/2) - 2\hat{\lambda}^2(2 + \hat{\lambda})^2s_2^2 - 2\hat{\lambda}^3(m_2 - m_1)^2 - \\ - 2\hat{\lambda}^4(m_2 - m_1)^2 = 0.$$

Az $s_1^2, s_2^2, m_2 - m_1$ statisztikák előnye, hogy függetlenek a $\xi(t)$ folyamat kiindulási értékétől.

Az időben diszkrét esetben

$$(1.6) \quad \frac{1-\rho}{\sigma_\epsilon^2} \left\{ (1+\rho)(x_1 - m) + \frac{4}{2} [x_i - m - \rho(x_{i-1} - m)] \right\} = 0 -$$

$$- \frac{\rho}{1-\rho^2} + \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \left\{ \rho(x_1 - m)^2 + \frac{4}{2} [x_i - m - \rho(x_{i-1} - m)] (x_{i-1} - m) \right\} = 0$$

adódik, ahonnan

$$\tilde{m} = \frac{x_1 + x_n + (1 - \tilde{\rho}) \sum_{i=1}^{n-1} x_i}{2 + (n-2)(1 - \tilde{\rho})} -$$

$$- \tilde{\rho} \cdot \sigma_\epsilon^2 + (1 - \tilde{\rho}^2) \left\{ \tilde{\rho}(x_1 - \tilde{m})^2 + \frac{n}{2} [x_i - \tilde{m} - \tilde{\rho}(x_{i-1} - \tilde{m})] (x_{i-1} - \tilde{m}) \right\} = 0.$$

Az

$$m_1 = \frac{1}{2}(\xi(0) + \xi(T)), \quad m_2 = \frac{1}{T_0} \int_0^T \xi(t) dt, \quad s_{01}^2 = \frac{1}{2}[\xi^2(0) + \xi^2(T)], \quad s_{02}^2 = \int_0^T \xi^2(t) dt$$

statisztikák együttes karakterisztikus függvényére, lásd Arató [1], ($M \xi(t) = 0$ esetén)

$$M \exp \left\{ i(\alpha_1 m_1 + \alpha_2 s_{01}^2 + \alpha_3 m_2 + \alpha_4 s_{02}^2) \right\} = \frac{2\sqrt{\lambda} e^{\frac{K}{2}} \varphi_1^{1/2}(\alpha_4)}{\sqrt{T} [\varphi(\alpha_2, \alpha_4)]^{1/2}} \cdot$$

$$\cdot \exp \frac{1}{2} \left\{ - \frac{\alpha_1 \alpha_3 \sigma_\epsilon^2 + \alpha_3^2 \sigma_\epsilon^2}{\varphi_1^2(\alpha_4)} T + \left(\frac{i\alpha_1}{2} - \frac{i\alpha_3 \lambda + \alpha_2 \alpha_3 \sigma_\epsilon^2}{\varphi_1^2(\alpha_4)} \right) \left[\left(\frac{i\alpha_1 \sigma_\epsilon^2}{2} (1 + e^{-\varphi_1})^{(\alpha_4)} + i\alpha_3 \sigma_\epsilon^2 \right) \right. \right.$$

$$\cdot \left. \frac{1 - e^{-\varphi_1(\alpha_4)}}{\varphi_1(\alpha_4)} \right] \cdot \frac{(K - T i \alpha_2 \sigma_\epsilon^2 + \sqrt{K^2 - 2T \sigma_\epsilon^2 i \alpha_4}) e^{\varphi(\alpha_4)} - (K - T \sigma_\epsilon^2 i \alpha_2 - \varphi(\alpha_4))}{T \varphi(\alpha_2, \alpha_4)} +$$

$$+ \left(\frac{i\alpha_1}{2} \sigma_\epsilon^2 (1 + e^{-\varphi(\alpha_4)}) - i\alpha_3 \sigma_\epsilon^2 \frac{1 - e^{\varphi(\alpha_4)}}{\sqrt{K^2 - 2T \sigma_\epsilon^2 i \alpha_4}} \right) \cdot$$

$$\cdot \left. \frac{(K - T \sigma_\epsilon^2 i \alpha_2 + \varphi(\alpha_4)) - (K - T \sigma_\epsilon^2 i \alpha_4) \varphi(\alpha_4) e^{-\varphi(\alpha_4)}}{T \varphi(\alpha_2, \alpha_4)} \right\}$$

adódik, ahol $K = \lambda \cdot T$

$$\varphi_1(\alpha) = \sqrt{K^2 - 2T \sigma_\epsilon^2 i \alpha}$$

$$\varphi(\alpha_2, \alpha_4) = \frac{1}{T^2} e^{\varphi(\alpha_4)} (K - T \sigma_\epsilon^2 i \alpha_2 + \varphi(\alpha_4))^2 -$$

$$-\frac{1}{T^2} \cdot e^{-\varphi(\alpha_4)} (K - T\sigma_\varepsilon^2 \alpha_2 - \varphi(\alpha_4))^2.$$

A karakterisztikus függvény felírása azonban nem jelenti a probléma megoldását, mivel a legegyszerűbb becsléseket véve is a két ismeretlen paramétere, (pl. a $\frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt$, $\frac{1}{T} \int_0^T (\xi(s) - \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt)^2 ds$ statisztikákat) azok eloszlása (karakterisztikus függvénye) nem határozható meg. A statisztikák aszimptotikus viselkedésére vonatkozó következtetéseket azonban le tudjuk vonni. Tekintsük a $\sqrt{\lambda} m_1$, $\sqrt{\lambda} m_2$, λs_{01}^2 , $\lambda^2 s_{02}^2$ statisztikák karakterisztikus függvényét $\lambda \rightarrow 0$ esetén. Könnyen látható, hogy

$$Me^{i(a_1 \sqrt{\lambda} m_1 + a_2 \sqrt{\lambda} m_2 + a_3 \sqrt{\lambda} s_{01}^2 + a_4 \lambda^2 s_{02}^2)} = \frac{(1 + \frac{K}{2})}{\left\{ 1 - \sigma_\varepsilon^2 \alpha_2 + \frac{K}{2} [(1 - \sigma_\varepsilon^2 \alpha_2)^2 + 1 - 2\sigma_\varepsilon^2 \frac{i\alpha_4}{T}] \right\}^{1/2}} + o(K).$$

2. §. EGYETLEN ISMERETLEN PARAMÉTER KÜLÖNBÖZŐ BECSLÉSEI ÉS A BECSLÉSEK ELOSZLÁSAI

Ha a $\xi(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) folyamat egyetlen ismeretlen paramétere $m = M\xi(t)$, akkor m maximum likelihood becslése

$$\hat{m} = \frac{m_1 + m_2}{2 + \lambda}$$

normális eloszlású m , $D^2(\hat{m}) = \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{2 + \lambda}$ paraméterekkel (lásd pl. Grenander [1]).

Legyen a továbbiakban $m = 0$ és az ismeretlen paraméter λ . A λ paraméter maximum likelihood becslésének eloszlását különböző λ értékekre egy előbbi cikkünkben megadtuk (Arató – Benczúr [1]). Mivel mind a folytonos, mind a diszkrét esetben eddig ez az egyetlen analitikus úton meghatározott s táblázatba foglalt eloszlás, a gyakorlatban használt becsléseknek a maximum likelihood becsléssel való összehasonlítása és az időben diszkrét és időben folytonos eset eredményeinek összevetése igen fontosnak tűnik. A már említett Arató – Benczúr [1] cikk táblázataiból látható, hogy a maximum likelihood becslés eloszlásának normális eloszlással való közelítése csak $\lambda T > 1000$ értékekre használható! Ez a körülmény is szükségessé teszi a pontos eloszlások meghatározását, amikor az lehetséges. A CDC-3300-as gépre került szimulációs programban az időben diszkrét megfigyelések $\rho = e^{-\lambda T}$ (ahol T a $[0,1]$ intervallumba eső megfigyelések száma) paraméterének különböző becsléseit vizsgáljuk, ahonnan a $\lambda = -T \log \rho$ összefüggés alapján számíthatók λ becslései. A program leírását a 4. §.-ban adjuk meg. A következő becsléseket vizsgáljuk:

$$(2.1) \quad \hat{\rho}_1 = \frac{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \xi_i \xi_{i-1}}{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \xi_i^2},$$

$$(2.2) \quad \hat{\rho}_2 = \frac{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \xi_i \xi_{i-1}}{\frac{1}{T} \sum_{i=0}^T \xi_i^2},$$

$$(2.3) \quad \hat{\rho}_3 = \frac{T+1}{T} \frac{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \xi_i \xi_{i-1}}{\frac{1}{T} \sum_{i=0}^T \xi_i^2},$$

$$(2.4) \quad \hat{\lambda}_4 = \frac{T+1}{2 \sum_{i=0}^T \xi_i^2},$$

$$(2.5) \quad \hat{\rho}_5 \text{ a } \rho \text{ maximum likelihood becslése:}$$

$$(1 - \hat{\rho}_5^2) \left(\sum_{i=1}^T \xi_i \xi_{i-1} - \hat{\rho}_5 \sum_{i=1}^{T-1} \xi_i^2 \right) - \hat{\rho}_5 (1 - \hat{\rho}_5) / 2\lambda = 0.$$

T értékét 20, 60, 100-nak (egyes esetekben 500, 800, 1000) választottuk. A folytonos folyamat maximum likelihood becslése eloszlásával való összehasonlításból látható, hogy a $0 < \lambda \leq 10$ intervallumban a folytonos folyamattal való egyezéshez gyakorlatilag elegendő a $T = 60$, ill. 100 választása.

Fix λ , T értékek esetén $n = 100$ különböző realizációra határoztuk meg a $\hat{\lambda}_{i,k}$ ($i = 1, \dots, 5$; $k = 1, 2, \dots, 100$)-értékeket s a megfelelő $F_{i,n}(x)$ ($i = 1, \dots, 5$) empirikus eloszlásokat:

$$F_{i,n}(x) = \frac{k}{n}, \quad \text{ha } \hat{\lambda}_{i,k} \leq x < \hat{\lambda}_{i,k+1} \quad (i = 1, \dots, 5; k = 1, 2, \dots, 100).$$

Az alábbi táblázatban megadjuk a különböző becslések p kvantiliseit a $p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95$ értékekre, azaz a táblázatban (adott T, λ értékek mellett) fix p -re azon λ_p szerepel, melyre $F_{i,n}(\lambda_p) = p$. A λ_p értékeket az empirikus eloszlásokból átlagolással számítottuk (adott λ, T esetén 10 – 20 darab 100-as elemszámú empirikus eloszlásfüggvény meghatározására került sor).

A táblázatok 6. oszlopában az időben folytonos folyamat maximum likelihood becslésre elméletileg számolt λ_p érték szerepel.

Külön táblázatban megadjuk az empirikus eloszlásfüggvényekből számított várható értékek átlagát is (I. 7. táblázat)

I.1. táblázat ($p = 0.01$ empirikus kvantilisei)
A táblázatban adott z , amelyre $P_{\lambda}\{\hat{\lambda}_1 \leq z\} = 0.01$

$\lambda \backslash \hat{\lambda}_i$			$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\lambda_{0.01}$
			(3)(2)(1)	(3)	(3)	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)	
0.000001	T=	20	-0.16	0.945	-0.042	$0.36 * 10^{-3}$	$0.14 * 10^{-6}$	$0.15 * 10^{-6}$
		60	-0.05	0.96	-0.034	$0.13 * 10^{-6}$	$0.77 * 10^{-7}$	
		100	-0.18	0.91	-0.089	$0.16 * 10^{-6}$	$0.90 * 10^{-7}$	
			(6)	(5)	(5)	(6)	(6)	
0.00001	T=	20	-0.085	0.91	-0.065	$0.14 * 10^{-5}$	$0.14 * 10^{-5}$	$0.15 * 10^{-5}$
		60	-0.22	0.92	-0.133	$0.15 * 10^{-5}$	$0.12 * 10^{-5}$	
		100	-0.22	0.89	-0.081	$0.13 * 10^{-5}$	$0.07 * 10^{-5}$	
			(11)	(5)	(5)	(11)	(11)	
0.0001	T=	20	-0.42	0.82	-0.15	$0.13 * 10^{-4}$	$0.14 * 10^{-4}$	$0.15 * 10^{-4}$
		60	-0.45	0.91	-0.07	$0.14 * 10^{-4}$	$0.14 * 10^{-4}$	
		100	-0.39	0.82	-0.17	$0.08 * 10^{-4}$	$0.15 * 10^{-4}$	
			(18)			(18)	(18)	
0.001	T=	20	-0.68			$0.14 * 10^{-3}$	$0.14 * 10^{-3}$	$0.15 * 10^{-3}$
		60	-0.80			$0.13 * 10^{-3}$	$0.11 * 10^{-3}$	
		100	-0.98			$0.15 * 10^{-3}$	$0.10 * 10^{-3}$	
			(14)(13)(13)	(5)	(5)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	
0.01	T=	20	-1.16	0.65	-0.32	$0.13 * 10^{-2}$	$0.12 * 10^{-2}$	$0.16 * 10^{-2}$
		60	-1.02	0.63	-0.36	$0.15 * 10^{-2}$	$0.10 * 10^{-2}$	
		100	-0.95	0.57	-0.42	$0.15 * 10^{-2}$	$0.10 * 10^{-2}$	
			(8)(8)(7)			(8)(8)(8)	(8)(8)(8)	
0.1	T=	20	-1.80			0.017	0.016	$0.16 * 10^{-1}$
		60	-1.58			0.018	0.017	
		100	-1.50			0.014	0.012	
			(9)(8)(8)			(9)(8)(8)	(9)(8)(8)	
0.5	T=	20	-1.98			0.07	0.08	0.09
		60	-1.58			0.08	0.06	
		100	-1.31			0.09	0.06	
			(13)(12)(12)	(5)	(5)	(13)(12)(12)	(13)(12)(12)	
1.0	T=	20	-1.55	0.58	-0.39	0.16	0.18	0.205
		60	-1.69	0.67	-0.31	0.20	0.20	
		100	-1.14	0.53	-0.46	0.16	0.14	
			(8)	(5)	(5)	(8)	(8)	
2.0	T=	20	-1.26	0.72	0.73	0.40	0.41	0.48
		60	-0.77	0.86	0.87	0.51	0.45	
		100	-0.57	0.84	0.84	0.48	0.35	
			(13)	(10)	(10)	(13)	(13)	
3.0	T=	20	-0.28	0.97	-0.003	0.68	0.64	0.807
		60	-0.08	1.11	0.12	0.73	0.62	
		100	-0.19	1.11	0.120	0.67	0.56	
			(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	
4.0	T=	20	-0.55	1.056	0.084	0.95	0.80	1.192
		60	0.02	1.36	0.47	1.08	0.98	
		100	0.13	1.49	0.509	1.07	0.75	
			(12)(11)(11)	(10)	(10)	(12)(11)(11)	(12)(11)(11)	
5.0	T=	20	0.25	1.37	0.40	1.46	1.13	1.615
		60	0.93	1.86	0.87	1.58	1.34	
		100	0.78	1.97	0.98	1.53	1.21	
			(10)	(5)	(5)	(9)	(9)(9)(8)	
10.0	T=	20	2.31	2.74	1.77	3.81	2.76	4.20
		60	3.27	4.12	3.13	4.25	3.21	
		100	3.12	4.26	3.27	4.21	3.18	

I.2. táblázat ($p = 0.05$ empirikus kvantilisei)
A táblázatban adott z , amelyre $P_{\lambda} \{ \hat{\lambda}_i \leq z \} = 0.05$

$\lambda \backslash \hat{\lambda}_i$		$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\lambda_{0.05}$
		(3)(2)(1)	(3)	(3)	(3)	(3)(2)(1)	
0.000001	T= 20	-0.02	0.97	-0.006	$0.21 * 10^{-6}$	$0.23 * 10^{-6}$	$0.26 * 10^{-6}$
	60	$-0.70 * 10^{-2}$	0.99	-0.0030	$0.22 * 10^{-6}$	$0.19 * 10^{-6}$	
	100	-0.01	0.99	-0.0053	$0.11 * 10^{-6}$	$0.19 * 10^{-6}$	
		(6)	(5)	(5)	(6)	(6)	
0.00001	T= 20	-0.02	0.96	-0.0101	$0.25 * 10^{-5}$	$0.24 * 10^{-5}$	$0.26 * 10^{-5}$
	60	-0.03	0.97	-0.014	$0.27 * 10^{-5}$	$0.20 * 10^{-5}$	
	100	-0.04	0.97	-0.021	$0.24 * 10^{-5}$	$0.13 * 10^{-5}$	
		(11)	(5)	(5)	(11)	(11)	
0.0001	T= 20	-0.13	0.93	-0.036	$0.27 * 10^{-4}$	$0.25 * 10^{-4}$	$0.26 * 10^{-4}$
	60	-0.10	0.95	-0.04	$0.26 * 10^{-4}$	$0.20 * 10^{-4}$	
	100	-0.08	0.95	-0.04	$0.27 * 10^{-4}$	$0.14 * 10^{-4}$	
		(18)			(18)	(18)	
0.001	T= 20	-0.19			$0.26 * 10^{-3}$	$0.25 * 10^{-3}$	$0.26 * 10^{-3}$
	60	-0.20			$0.25 * 10^{-3}$	$0.20 * 10^{-3}$	
	100	-0.22			$0.27 * 10^{-3}$	$0.18 * 10^{-3}$	
		(14)	(5)	(5)	(13)	(14)	
0.01	T= 20	-0.42	0.78	-0.19	$0.24 * 10^{-2}$	$0.22 * 10^{-2}$	$0.26 * 10^{-2}$
	60	-0.35	0.83	-0.15	$0.26 * 10^{-2}$	$0.23 * 10^{-2}$	
	100	-0.41	0.79	-0.202	$0.27 * 10^{-2}$	$0.20 * 10^{-2}$	
		(5)			(8)	(8)	
0.1	T= 20	-0.82			0.026	0.026	$0.27 * 10^{-1}$
	60	-0.69			0.030	0.028	
	100	-0.64			0.026	0.020	
		(8)			(8)	(9)	
0.5	T= 20	-0.74			0.14	0.13	$0.15 * 10^{-1}$
	60	-0.65			0.16	0.12	
	100	-0.66			0.14	0.09	
		(13)	(5)	(5)	(12)	(12)	
1.0	T= 20	-0.46	0.83	-0.144	0.29	0.28	0.332
	60	-0.52	0.91	-0.044	0.34	0.31	
	100	-0.44	0.88	-0.13	0.30	0.25	
		(8)	(5)	(5)	(8)	(8)	
2.0	T= 20	-0.25	1.16	1.16	0.63	0.58	0.75
	60	0.28	1.43	1.43	0.81	0.73	
	100	0.36	1.32	1.32	0.74	0.71	
		(13)	(10)	(10)	(13)	(13)	
3.0	T= 20	0.61	1.56	0.87	1.13	1.02	1.233
	60	0.79	1.51	0.64	1.25	1.15	
	100	0.67	1.70	0.73	1.12	0.92	
		(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	
4.0	T= 20	0.93	2.06	1.093	1.67	1.30	1.760
	60	1.55	2.24	1.25	1.70	1.54	
	100	1.27	2.15	1.16	1.62	1.38	
		(12)(12)(11)	(10)	(10)	(12)	(11)	
5.0	T= 20	1.54	2.45	1.48	2.13	1.86	2.325
	60	2.04	2.73	1.74	2.28	2.27	
	100	1.97	2.83	1.84	2.23	1.91	
		(9)(10)(9)	(5)	(5)	(9)	(8)	
10.0	T= 20	3.68	4.74	3.77	5.23	3.99	5.50
	60	5.03	5.66	4.67	5.71	5.12	
	100	5.04	5.66	5.67	5.09	5.07	

I.3. táblázat (p = 0.1 empirikus kvantilisei)

A táblázatban adott z, amelyre $P_{\lambda} \{ \hat{\lambda}_1 \leq z \} = 0.1$

λ	$\hat{\lambda}_i$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\lambda_{0.1}$
0.000001	T=	(3)(2)(1)	(3)	(3)	(3)(1)(1)	(3)(2)(1)	$0.369 \cdot 10^{-6}$
		20 $-0.57 \cdot 10^{-2}$	0.97	-0.003	$0.37 \cdot 10^{-6}$	$0.36 \cdot 10^{-6}$	
		60 $-0.45 \cdot 10^{-2}$	0.99	-0.002	$0.28 \cdot 10^{-6}$	$0.25 \cdot 10^{-6}$	
0.00001	T=	100 $-0.49 \cdot 10^{-2}$	0.99	-0.002	$0.27 \cdot 10^{-6}$	$0.16 \cdot 10^{-6}$	$0.369 \cdot 10^{-5}$
		(6)	(5)	(5)	(6)	(6)	
		20 -0.013	0.97	-0.0065	$0.34 \cdot 10^{-5}$	$0.32 \cdot 10^{-5}$	
0.0001	T=	60 -0.02	0.98	-0.0092	$0.41 \cdot 10^{-5}$	$0.31 \cdot 10^{-5}$	$0.369 \cdot 10^{-4}$
		100 -0.02	0.98	-0.0108	$0.33 \cdot 10^{-5}$	$0.18 \cdot 10^{-5}$	
		(11)	(5)	(5)	(11)	(11)	
0.001	T=	20 -0.05	0.95	-0.02	$0.37 \cdot 10^{-4}$	$0.35 \cdot 10^{-4}$	$0.369 \cdot 10^{-3}$
		60 -0.04	0.96	-0.02	$0.38 \cdot 10^{-4}$	$0.22 \cdot 10^{-4}$	
		100 -0.04	0.97	-0.019	$0.37 \cdot 10^{-4}$	$0.20 \cdot 10^{-4}$	
0.01	T=	(18)	(5)	(5)	(18)	(18)	$0.369 \cdot 10^{-2}$
		20 -0.12			$0.38 \cdot 10^{-3}$	$0.37 \cdot 10^{-3}$	
		60 -0.10			$0.36 \cdot 10^{-3}$	$0.29 \cdot 10^{-3}$	
0.1	T=	100 -0.13			$0.37 \cdot 10^{-3}$	$0.24 \cdot 10^{-3}$	$0.369 \cdot 10^{-1}$
		(14)(13)(13)	(5)	(5)	(14)	(14)	
		20 -0.25	0.86	-0.11	$0.33 \cdot 10^{-2}$	$0.32 \cdot 10^{-2}$	
0.5	T=	60 -0.22	0.89	-0.093	$0.35 \cdot 10^{-2}$	$0.29 \cdot 10^{-2}$	0.209
		100 -0.25	0.87	-0.12	$0.37 \cdot 10^{-2}$	$0.27 \cdot 10^{-2}$	
		(8)(8)(7)			(8)	(8)	
1.0	T=	20 -0.50			0.041	0.041	0.445
		60 -0.46			0.038	0.036	
		100 -0.39			0.035	0.029	
2.0	T=	(9)(9)(8)			(9)	(9)	0.972
		20 -0.31			0.20	0.19	
		60 -0.36			0.21	0.17	
3.0	T=	100 -0.45			0.22	0.12	1.557
		(13)(13)(12)	(5)	(5)	(13)(13)(12)	(13)(12)(12)	
		20 -0.05	0.98	0.0104	0.42	0.40	
4.0	T=	60 0.03	1.07	0.084	0.45	0.41	2.180
		100 -0.09	1.07	0.075	0.42	0.36	
		(8)	(5)	(5)	(8)	(8)	
5.0	T=	20 0.36	1.48	1.48	0.74	0.80	2.835
		60 0.71	1.77	1.78	1.08	1.02	
		100 0.67	1.606	1.608	0.91	1.01	
10.0	T=	(13)	(10)	(10)	(13)	(13)	6.38
		20 1.06	1.930	0.96	1.41	1.35	
		60 1.32	2.04	1.05	2.03	1.44	
	T=	100 1.17	2.16	1.17	1.47	1.23	6.38
		(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	
		20 1.53	2.69	1.72	2.03	1.78	
	T=	60 1.91	2.73	1.74	2.19	1.99	6.38
		100 1.80	2.64	1.71	2.06	1.77	
		(11)	(10)	(10)	(12)	(12)	
	T=	20 2.17	2.97	1.980	2.47	2.34	6.38
		60 2.59	3.39	2.38	2.89	2.86	
		100 2.50	3.33	2.34	2.65	2.40	
	T=	(9)	(5)	(5)	(9)	(9)	6.38
		20 4.46	5.904	4.93	6.03	5.10	
		60 6.15	6.90	5.92	6.52	6.23	
		100 5.71	6.77	5.78	5.87	5.55	

I.4. táblázat ($p = 0.5$ empirikus kvantilisei)
A táblázatban adott z , amelyre $P_{\lambda} \{ \hat{\lambda}_i \leq z \} = 0.5$

$\lambda \backslash \hat{\lambda}_i$		$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$
		(3)(2)(1)	(3)	(3)	(3)(1)(1)	(3)(2)(1)
0.000001	T= 20	$-0.01 * 10^{-3}$	0.98	$-0.13 * 10^{-3}$	$0.24 * 10^{-5}$	$0.23 * 10^{-5}$
	60	$-0.30 * 10^{-4}$	0.99	$-0.67 * 10^{-4}$	$0.15 * 10^{-5}$	$0.14 * 10^{-5}$
	100	$0.20 * 10^{-4}$	1.00	$-0.18 * 10^{-3}$	$0.17 * 10^{-5}$	$0.90 * 10^{-6}$
		(6)	(5)	(5)	(6)	(6)
0.00001	T= 20	$0.48 * 10^{-3}$	0.98	$-0.27 * 10^{-3}$	$0.21 * 10^{-4}$	$0.22 * 10^{-4}$
	60	$-0.28 * 10^{-3}$	0.99	$-0.18 * 10^{-3}$	$0.25 * 10^{-4}$	$0.19 * 10^{-4}$
	100	$0.09 * 10^{-3}$	0.99	$-0.92 * 10^{-4}$	$0.21 * 10^{-4}$	$0.12 * 10^{-4}$
		(11)	(5)	(5)	(11)	(11)
0.0001	T= 20	$-0.2 * 10^{-3}$	0.97	$-0.19 * 10^{-3}$	$0.23 * 10^{-3}$	$0.21 * 10^{-3}$
	60	0.001	0.99	$0.33 * 10^{-3}$	$0.22 * 10^{-3}$	$0.16 * 10^{-3}$
	100	$0.13 * 10^{-3}$	1.00	$0.11 * 10^{-2}$	$0.22 * 10^{-3}$	$0.12 * 10^{-3}$
		(18)			(18)	(18)
0.001	T= 20	0.065			$0.22 * 10^{-2}$	$0.21 * 10^{-2}$
	60	0.044			$0.22 * 10^{-2}$	$0.18 * 10^{-2}$
	100	-0.00043			$0.22 * 10^{-2}$	$0.12 * 10^{-2}$
		(14)	(5)	(5)	(14)	(14)
0.01	T= 20	0.018	1.00	0.025	0.020	0.018
	60	0.033	1.02	0.036	0.021	0.018
	100	0.039	1.01	0.017	0.020	0.014
		(8)			(8)(8)(7)	(8)(8)(7)
0.1	T= 20	0.31			0.21	0.19
	60	0.21			0.20	0.19
	100	0.29			0.20	0.17
		(9)			(9)	(9)
0.5	T= 20	0.94			0.87	0.75
	60	0.82			0.83	0.71
	100	0.90			0.87	0.57
		(13)	(5)	(5)	(13)	(13)
1.0	T= 20	1.59	2.64	1.66	1.47	1.41
	60	1.68	2.74	1.79	1.65	1.49
	100	1.61	2.73	1.73	1.53	1.29
		(8)	(5)	(5)	(8)	(8)
2.0	T= 20	2.62	3.81	3.82	2.38	2.35
	60	2.79	3.908	3.91	2.79	2.70
	100	2.73	4.07	3.48	2.48	2.33
		(13)	(10)	(10)	(13)	(13)
3.0	T= 20	3.50	4.49	3.47	3.42	3.47
	60	3.85	5.17	4.12	3.79	3.52
	100	3.67	4.72	3.64	3.75	3.17
		(10)	(10)	(10)	(10)	(10)
4.0	T= 20	4.55	5.61	4.61	4.44	4.26
	60	5.01	5.79	5.01	4.72	4.56
	100	4.68	5.805	4.815	4.66	4.68
		(12)	(10)	(10)	(12)	(12)
5.0	T= 20	5.55	6.49	5.52	6.68	5.61
	60	6.09	6.88	5.89	5.81	5.86
	100	5.92	6.79	5.79	5.81	5.43
		(9)	(5)	(5)	(9)	(8)
10.0	T= 20	10.50	11.52	10.54	10.28	10.64
	60	11.06	11.92	10.93	10.80	10.95
	100	10.88	12.24	10.98	10.66	10.26

I.5. táblázat ($p = 0.9$ empirikus kvantilisei)

A táblázatban adott z , amelyre $P_{\lambda} \{ \hat{\lambda}_1 \leq z \} = 0.9$

$\lambda \backslash \hat{\lambda}_i$		$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\lambda_{0.9}$
		(3)(2)(1)	(3)	(3)	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)	
0.000001	T= 20	$0.59 * 10^{-2}$	0.98	$0.20 * 10^{-2}$	$0.95 * 10^{-4}$	$0.90 * 10^{-4}$	$0.636 * 10^{-4}$
	60	$0.30 * 10^{-2}$	0.99	0.0016	$0.36 * 10^{-4}$	$0.18 * 10^{-4}$	
	20	$0.38 * 10^{-2}$	1.00	0.0024	$0.51 * 10^{-4}$	$0.27 * 10^{-4}$	
		(6)	(5)	(5)	(6)	(6)	
0.00001	T= 20	0.02	0.98	0.0089	$0.47 * 10^{-3}$	$0.44 * 10^{-3}$	$0.636 * 10^{-3}$
	60	0.01	1.002	0.011	$0.61 * 10^{-3}$	$0.43 * 10^{-3}$	
	100	0.01	1.002	0.007	$0.66 * 10^{-3}$	$0.43 * 10^{-3}$	
		(11)	(5)	(5)	(11)	(11)	
0.0001	T= 20	0.06	1.008	0.03	$0.9 * 10^{-2}$	$0.9 * 10^{-2}$	$0.636 * 10^{-2}$
	60	0.044	1.02	0.03	$0.52 * 10^{-2}$	$0.6 * 10^{-2}$	
	100	0.14	1.02	0.03	$0.86 * 10^{-2}$	$0.45 * 10^{-2}$	
		(18)			(18)	(18)	
0.001	T= 20	0.23			0.072	0.065	$0.636 * 10^{-1}$
	60	0.177			0.069	0.050	
	100	0.17			0.057	0.039	
		(14)	(5)	(5)	(14)	(14)	
0.01	T= 20	0.87	1.84	0.86	0.38	0.40	0.473
	60	0.74	1.50	0.506	0.40	0.37	
	100	0.67	1.55	0.55	0.42	0.37	
		(8)			(8)	(8)	
0.1	T= 20	2.41			1.87	2.04	1.908
	60	2.19			1.94	1.62	
	100	2.45			2.21	1.72	
		(9)			(9)	(9)	
0.5	T= 20	4.37			3.90	3.66	3.861
	60	3.15			3.54	3.63	
	100	3.92			3.58	3.06	
		(13)	(5)	(5)	(13)	(13)	
1.0	T= 20	5.82	7.37	6.39	5.11	5.34	5.188
	60	6.09	7.29	6.29	5.72	5.13	
	100	5.69	6.84	5.85	5.21	4.98	
		(8)	(5)	(5)	(8)	(8)	
2.0	T= 20	7.48	8.65	8.66	6.35	7.35	7.156
	60	8.34	9.806	9.81	7.39	7.43	
	100	7.27	8.87	8.87	6.86	6.55	
		(13)	(10)	(10)	(13)	(13)	
3.0	T= 20	9.44	10.31	9.33	8.61	9.06	8.81
	60	9.24	10.38	9.39	8.78	8.87	
	100	7.95	10.07	9.08	8.61	7.93	
		(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	
4.0	T= 20	10.87	12.04	11.07	9.83	10.70	10.352
	60	11.37	12.66	11.67	10.35	11.19	
	100	10.46	12.09	11.10	10.10	9.85	
		(12)	(10)	(10)	(12)	(12)	
5.0	T= 20	12.75	13.56	12.58	11.47	12.65	12.755
	60	12.90	14.32	13.34	11.98	12.78	
	100	12.64	13.89	12.90	11.08	11.78	
		(9)	(5)	(5)	(9)	(8)	
10.0	T= 20	18.91	22.64	21.67	19.09	21.96	18.53
	60	19.45	21.604	20.61	18.12	19.06	
	100	18.04	21.45	20.44	18.45	18.16	

I.6. táblázat ($p = 0.95$ empirikus kvantilisei)
A táblázatban adott z , amelyre $P_{\lambda} \{ \hat{\lambda}_i \leq z \} = 0.95$

$\lambda \backslash \hat{\lambda}_i$		$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\lambda_{0.95}$
		(3)	(3)	(3)	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)	
0.000001	T= 20	0.013	0.98	0.0040	$0.26 * 10^{-3}$	$0.24 * 10^{-3}$	$0.255 * 10^{-3}$
	60	$0.42 * 10^{-2}$	0.99	0.0030	$0.72 * 10^{-4}$	$0.11 * 10^{-3}$	
	100	0.01	1.00	0.005	$0.24 * 10^{-3}$	$0.12 * 10^{-3}$	
		(6)	(5)	(5)	(6)	(6)	
0.00001	T= 20	0.032	0.99	0.015	$0.34 * 10^{-2}$	$0.33 * 10^{-2}$	$0.255 * 10^{-2}$
	60	0.035	1.01	0.0204	$0.34 * 10^{-2}$	$0.26 * 10^{-2}$	
	100	0.037	1.01	0.014	$0.73 * 10^{-2}$	$0.37 * 10^{-2}$	
		(11)	(5)	(5)	(11)	(11)	
0.0001	T= 20	0.11	1.05	0.092	0.035	0.032	$0.255 * 10^{-1}$
	60	0.12	1.068	0.074	0.021	0.42	
	100	0.15	1.104	0.106	0.0307	0.019	
		(18)			(18)	(18)	
0.001	T= 20	0.53			0.28	0.23	0.255
	60	0.38			0.23	0.209	
	100	0.43			0.21	0.14	
		(14)	(5)	(5)	(14)	(14)	
0.01	T= 20	1.57	2.77	1.99	1.03	0.87	1.17
	60	1.41	2.419	1.42	1.206	1.05	
	100	1.32	2.22	1.24	0.92	0.75	
		(8)			(8)	(8)	
0.1	T= 20	3.86			3.27	3.28	3.268
	60	3.42			2.83	2.88	
	100	4.13			3.96	3.67	
		(9)			(9)	(9)	
0.5	T= 20	6.04			5.65	5.39	5.605
	60	5.82			5.18	5.03	
	100	5.26			5.71	4.08	
		(13)	(5)	(5)	(13)	(13)	
1.0	T= 20	7.95	10.26	9.86	6.76	7.43	7.103
	60	6.52	9.12	8.13	7.43	6.92	
	100	7.69	8.46	7.27	6.86	6.81	
		(8)	(5)	(5)	(8)	(8)	
2.0	T= 20	9.39	11.03	11.03	8.21	8.97	9.272
	60	10.56	11.87	11.98	9.25	9.75	
	100	9.57	10.51	10.51	8.64	8.34	
		(13)	(10)	(10)	(13)	(13)	
3.0	T= 20	12.25	13.24	12.26	9.89	12.32	11.082
	60	11.61	13.30	12.31	10.97	10.95	
	100	11.47	12.58	11.52	10.56	10.25	
		(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	
4.0	T= 20	13.32	15.05	14.08	11.88	13.19	12.732
	60	13.68	15.35	14.36	12.33	13.08	
	100	13.20	14.91	13.92	12.55	12.61	
		(12)	(10)	(10)	(12)	(12)	
5.0	T= 20	16.03	16.96	15.98	13.77	16.25	14.395
	60	15.33	16.58	15.59	14.12	15.04	
	100	15.16	16.450	15.57	13.99	14.36	
		(9)	(5)	(5)	(9)	(8)	
10.0	T= 20	27.92	28.55	27.58	22.27	29.07	21.47
	60	23.50	24.90	23.91	20.63	23.22	
	100	22.75	24.93	23.93	20.78	21.53	

I.7. táblázat (várható értékek átlagai)

$\lambda \backslash \hat{\lambda}_i$		$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$
0.000001	T=	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)
		20	$0.1 * 10^{-2}$	0.98	$0.1 * 10^{-2}$	$0.2 * 10^{-3}$
		60	$0.4 * 10^{-2}$	1.00	$0.2 * 10^{-2}$	$0.6 * 10^{-2}$
0.00001	T=	(6)(6)(6)	(5)(5)(5)	(5)(5)(5)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)
		20	$0.9 * 10^{-2}$	0.98	$0.45 * 10^{-2}$	$0.3 * 10^{-2}$
		60	$0.5 * 10^{-2}$	0.99	$0.29 * 10^{-2}$	$0.5 * 10^{-2}$
0.0001	T=	(11)(11)(11)	(10)(10)(9)	(10)(10)(9)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
		20	0.02	0.99	0.02	0.02
		60	0.03	1.04	0.05	0.03
0.001	T=	(18)(18)(18)			(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
		20	0.08		0.08	0.09
		60	0.08		0.09	0.07
0.01	T=	(14)(13)(13)	(5)(5)(5)	(5)(5)(5)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
		20	0.20	1.27	0.29	0.21
		60	0.27	1.29	0.29	0.22
0.1	T=	(8)(8)(7)			(8)(8)(7)	(8)(8)(7)
		20	0.74		0.73	0.70
		60	0.69		0.72	0.67
0.5	T=	(9)(9)(8)			(9)(9)(8)	(9)(9)(8)
		20	1.63		1.59	1.56
		60	1.59		1.59	1.48
1.0	T=	(13)(13)(12)	(5)(5)(5)	(5)(5)(5)	(13)(13)(12)	(13)(12)(12)
		20	2.47	3.69	2.72	2.30
		60	2.54	3.67	2.67	2.52
2.0	T=	(8)(8)(8)	(5)(5)(5)	(5)(5)(5)	(8)(8)(8)	(8)(8)(8)
		20	3.47	4.68	4.68	3.27
		60	3.83	5.10	5.10	3.75
3.0	T=	(13)(13)(13)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
		20	4.77	5.30	4.81	4.43
		60	4.87	6.03	5.03	4.72
4.0	T=	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
		20	5.61	7.05	6.07	5.48
		60	6.02	7.16	6.17	5.84
5.0	T=	(12)(12)(11)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(12)(12)(11)	(12)(12)(11)
		20	7.11	8.25	7.28	6.52
		60	7.12	8.13	7.14	6.87
10.0	T=	(9)(9)(9)	(8)(8)(7)	(8)(8)(7)	(9)(9)(9)	(8)(8)(8)
		20	12.34	13.95	12.97	11.78
		60	12.25	13.14	12.15	11.82
		100	11.97	13.12	12.13	11.69

A táblázatokban a táblázat fejlécében megadott értékhez tartozó kvantilisek \bar{x}_{ip} átlagértékei szerepelnek (\bar{x}_{ip} azon x_{ip} értékek átlaga, melyre $P_n\{\hat{\lambda}_i < x_{ip}\} = p$, ahol $\hat{\lambda}_i$ a (2.i) ($i = 1, 2, \dots, 5$) összefüggés alapján számolt becslés). A λ_p oszlopban (6. oszlop) az időben folytonos eset λ paramétere maximum likelihood becslése eloszlásának p kvantilise. Az egyes oszlopokban zárójelben szereplő egész szám adja meg, hogy hány minta alapján számoltuk az átlagokat.

Annak illusztrálására, hogy a megfigyelésszám növelésével a becslések eloszlásai lényegesen nem javulnak, tekintsük a $T = 1000$ és $\lambda = 10$ értékekhez tartozó $\hat{\lambda}_{1i}$, $\hat{\lambda}_{4i}$, $\hat{\lambda}_{5i}$ (I. 8. táblázat) valamint a $T = 800$ és $\lambda = 0.1$ értékekhez tartozó $\hat{\lambda}_{1i}$, $\hat{\lambda}_{4i}$, $\hat{\lambda}_{5i}$ becslések ($i = 1, 2, \dots, 100$) rendezett táblázatát (I. 9. táblázat). A táblázatokban a $\tilde{\lambda}_i$ becslések empirikus eloszlásait is megadjuk (amikor mindkét paraméter ismeretlen).

I.8. táblázat ($\lambda = 10.0$, $T = 1000$)

$\hat{\lambda}_1$ empirikus eloszlása									
.405E+1	.427E+1	.464E+1	.496E+1	.503E+1	.553E+1	.594E+1	.603E+1	.610E+1	.625E+1
.669E+1	.684E+1	.685E+1	.700E+1	.702E+1	.713E+1	.729E+1	.742E+1	.823E+1	.835E+1
.848E+1	.856E+1	.880E+1	.885E+1	.888E+1	.911E+1	.923E+1	.926E+1	.931E+1	.946E+1
.953E+1	.955E+1	.968E+1	.970E+1	.974E+1	.986E+1	.989E+1	.997E+1	.999E+1	.100E+2
.100E+2	.100E+2	.103E+2	.103E+2	.104E+2	.105E+2	.106E+2	.107E+2	.108E+2	.108E+2
.114E+2	.115E+2	.118E+2	.118E+2	.120E+2	.121E+2	.121E+2	.122E+2	.124E+2	.124E+2
.125E+2	.132E+2	.134E+2	.135E+2	.135E+2	.139E+2	.140E+2	.142E+2	.143E+2	.149E+2
.149E+2	.149E+2	.153E+2	.154E+2	.154E+2	.156E+2	.158E+2	.162E+2	.168E+2	.173E+2
.175E+2	.178E+2	.180E+2	.183E+2	.186E+2	.188E+2	.191E+2	.191E+2	.191E+2	.192E+2
.195E+2	.196E+2	.203E+2	.224E+2	.226E+2	.227E+2	.231E+2	.240E+2	.263E+2	.267E+2
$\hat{\lambda}_5$ empirikus eloszlása									
.408E+1	.490E+1	.508E+1	.519E+1	.541E+1	.544E+1	.624E+1	.646E+1	.651E+1	.676E+1
.678E+1	.681E+1	.685E+1	.717E+1	.732E+1	.740E+1	.746E+1	.746E+1	.751E+1	.765E+1
.768E+1	.772E+1	.790E+1	.864E+1	.888E+1	.890E+1	.898E+1	.928E+1	.928E+1	.930E+1
.935E+1	.939E+1	.939E+1	.960E+1	.977E+1	.979E+1	.982E+1	.986E+1	.993E+1	.994E+1
.994E+1	.101E+2	.102E+2	.103E+2	.104E+2	.104E+2	.104E+2	.104E+2	.105E+2	.106E+2
.107E+2	.107E+2	.109E+2	.111E+2	.111E+2	.112E+2	.113E+2	.114E+2	.114E+2	.117E+2
.118E+2	.122E+2	.124E+2	.125E+2	.125E+2	.126E+2	.130E+2	.131E+2	.135E+2	.136E+2
.136E+2	.137E+2	.140E+2	.140E+2	.140E+2	.141E+2	.145E+2	.149E+2	.153E+2	.155E+2
.156E+2	.159E+2	.161E+2	.168E+2	.168E+2	.174E+2	.181E+2	.182E+2	.190E+2	.191E+2
.192E+2	.194E+2	.196E+2	.201E+2	.226E+2	.231E+2	.234E+2	.237E+2	.258E+2	.271E+2
$\hat{\lambda}_4$ empirikus eloszlása									
.415E+1	.481E+1	.497E+1	.542E+1	.552E+1	.636E+1	.640E+1	.666E+1	.670E+1	.684E+1
.691E+1	.719E+1	.739E+1	.739E+1	.745E+1	.746E+1	.782E+1	.827E+1	.830E+1	.844E+1
.844E+1	.850E+1	.852E+1	.854E+1	.865E+1	.870E+1	.905E+1	.908E+1	.912E+1	.926E+1
.932E+1	.955E+1	.957E+1	.965E+1	.976E+1	.985E+1	.991E+1	.999E+1	.100E+2	.100E+2
.101E+2	.101E+2	.101E+2	.103E+2	.104E+2	.105E+2	.106E+2	.107E+2	.109E+2	.109E+2
.111E+2	.112E+2	.114E+2	.114E+2	.115E+2	.116E+2	.116E+2	.117E+2	.117E+2	.118E+2
.122E+2	.125E+2	.126E+2	.126E+2	.127E+2	.128E+2	.132E+2	.132E+2	.137E+2	.142E+2
.142E+2	.145E+2	.149E+2	.150E+2	.151E+2	.152E+2	.155E+2	.157E+2	.158E+2	.158E+2
.165E+2	.166E+2	.166E+2	.172E+2	.173E+2	.176E+2	.177E+2	.177E+2	.177E+2	.179E+2
.180E+2	.198E+2	.208E+2	.210E+2	.212E+2	.220E+2	.229E+2	.240E+2	.259E+2	.259E+2
$\hat{\lambda}_1$ empirikus eloszlása									
.511E+1	.557E+1	.573E+1	.648E+1	.668E+1	.698E+1	.710E+1	.717E+1	.742E+1	.829E+1
.834E+1	.863E+1	.889E+1	.912E+1	.935E+1	.939E+1	.957E+1	.962E+1	.966E+1	.967E+1
.978E+1	.979E+1	.990E+1	.100E+2	.101E+2	.103E+2	.109E+2	.109E+2	.110E+2	.113E+2
.113E+2	.114E+2	.115E+2	.115E+2	.115E+2	.116E+2	.116E+2	.117E+2	.118E+2	.119E+2
.119E+2	.120E+2	.121E+2	.122E+2	.123E+2	.124E+2	.125E+2	.125E+2	.128E+2	.130E+2
.132E+2	.134E+2	.136E+2	.137E+2	.141E+2	.142E+2	.145E+2	.146E+2	.148E+2	.149E+2
.149E+2	.150E+2	.152E+2	.153E+2	.153E+2	.163E+2	.166E+2	.167E+2	.168E+2	.169E+2
.169E+2	.170E+2	.173E+2	.174E+2	.175E+2	.179E+2	.185E+2	.185E+2	.188E+2	.197E+2
.197E+2	.200E+2	.200E+2	.207E+2	.211E+2	.212E+2	.213E+2	.219E+2	.220E+2	.221E+2
.229E+2	.239E+2	.244E+2	.245E+2	.260E+2	.264E+2	.290E+2	.319E+2	.321E+2	.380E+2
$\hat{\lambda}_2$ empirikus eloszlása									
.586E+1	.610E+1	.618E+1	.687E+1	.701E+1	.720E+1	.728E+1	.738E+1	.797E+1	.823E+1
.826E+1	.851E+1	.875E+1	.904E+1	.914E+1	.941E+1	.944E+1	.960E+1	.971E+1	.979E+1
.980E+1	.100E+2	.102E+2	.103E+2	.104E+2	.105E+2	.105E+2	.106E+2	.108E+2	.108E+2
.108E+2	.110E+2	.111E+2	.113E+2	.115E+2	.116E+2	.116E+2	.117E+2	.118E+2	.120E+2
.120E+2	.120E+2	.121E+2	.121E+2	.122E+2	.122E+2	.125E+2	.128E+2	.131E+2	.132E+2
.133E+2	.137E+2	.138E+2	.139E+2	.139E+2	.142E+2	.144E+2	.147E+2	.150E+2	.152E+2
.152E+2	.153E+2	.154E+2	.155E+2	.156E+2	.158E+2	.161E+2	.165E+2	.166E+2	.169E+2
.172E+2	.174E+2	.174E+2	.176E+2	.180E+2	.186E+2	.188E+2	.191E+2	.198E+2	.198E+2
.200E+2	.204E+2	.204E+2	.204E+2	.212E+2	.213E+2	.214E+2	.223E+2	.224E+2	.241E+2
.241E+2	.244E+2	.247E+2	.248E+2	.262E+2	.278E+2	.285E+2	.318E+2	.326E+2	.386E+2
$\hat{\lambda}_3$ empirikus eloszlása									
.241E+1	.344E+1	.460E+1	.502E+1	.530E+1	.554E+1	.580E+1	.629E+1	.671E+1	.679E+1
.756E+1	.825E+1	.839E+1	.853E+1	.863E+1	.940E+1	.119E+2	.128E+2	.135E+2	.142E+2
.155E+2	.157E+2	.169E+2	.171E+2	.176E+2	.187E+2	.206E+2	.229E+2	.232E+2	.252E+2
.256E+2	.268E+2	.268E+2	.269E+2	.271E+2	.272E+2	.285E+2	.287E+2	.287E+2	.299E+2
.308E+2	.316E+2	.330E+2	.408E+2	.457E+2	.479E+2	.499E+2	.501E+2	.517E+2	.525E+2
.553E+2	.603E+2	.609E+2	.687E+2	.698E+2	.723E+2	.731E+2	.742E+2	.746E+2	.803E+2
.805E+2	.823E+2	.101E+3	.101E+3	.103E+3	.118E+3	.139E+3	.151E+3	.159E+3	.197E+3
.201E+3	.238E+3	.239E+3	.253E+3	.254E+3	.262E+3	.325E+3	.340E+3	.428E+3	.431E+3
.501E+3	.547E+3	.549E+3	.605E+3	.877E+3	.996E+3	.109E+4	.112E+4	.137E+4	.152E+4
.161E+4	.184E+4	.194E+4	.212E+4	.237E+4	.305E+4	.406E+4	.980E+4	.264E+5	.251E+6

I.9. táblázat ($\lambda = 0.1$, $T = 800$)

$\hat{\lambda}_1$ empirikus eloszlása									
-189E+1	-138E+1	-119E+1	-685E+0	-661E+0	-565E+0	-503E+0	-404E+0	-381E+0	-379E+0
-373E+0	-335E+0	-309E+0	-305E+0	-272E+0	-249E+0	-223E+0	-222E+0	-257E+0	-201E+0
-190E+0	-186E+0	-182E+0	-174E+0	-172E+0	-149E+0	-126E+0	-122E+0	-948E-1	-729E-1
-546E-1	-533E-1	-379E-1	-363E-1	-130E-1	-424E-2	315E-1	368E-1	500E-1	559E-1
.613E-1	.849E-1	.969E-1	.116E+0	.121E+0	.128E+0	.202E+0	.245E+0	.247E+0	.268E+0
.297E+0	.301E+0	.309E+0	.319E+0	.323E+0	.329E+0	.355E+0	.369E+0	.392E+0	.393E+0
.401E+0	.416E+0	.431E+0	.445E+0	.458E+0	.477E+0	.485E+0	.497E+0	.555E+0	.593E+0
.649E+0	.767E+0	.806E+0	.821E+0	.936E+0	.100E+1	.106E+1	.111E+1	.115E+1	.117E+1
.119E+1	.126E+1	.129E+1	.132E+1	.135E+1	.173E+1	.177E+1	.178E+1	.211E+1	.302E+1
.305E+1	.393E+1	.408E+1	.498E+1	.589E+1	.596E+1	.724E+1	.725E+1	.108E+2	.251E+2
$\hat{\lambda}_5$ empirikus eloszlása									
.424E-3	.426E-3	.441E-3	.518E-3	.592E-3	.606E-3	.660E-3	.673E-3	.693E-3	.729E-3
.823E-3	.885E-3	.891E-3	.925E-3	.969E-3	.993E-3	.101E-2	.101E-2	.109E-2	.130E-2
.145E-2	.146E-2	.147E-2	.160E-2	.176E-2	.176E-2	.176E-2	.188E-2	.191E-2	.193E-2
.195E-2	.198E-2	.198E-2	.222E-2	.233E-2	.257E-2	.268E-2	.276E-2	.277E-2	.282E-2
.286E-2	.293E-2	.315E-2	.351E-2	.361E-2	.443E-2	.455E-2	.504E-2	.508E-2	.519E-2
.570E-2	.579E-2	.585E-2	.598E-2	.631E-2	.833E-2	.833E-2	.862E-2	.881E-2	.902E-2
.936E-2	.104E-1	.109E-1	.114E-1	.132E-1	.137E-1	.141E-1	.153E-1	.155E-1	.168E-1
.174E-1	.181E-1	.206E-1	.234E-1	.236E-1	.242E-1	.251E-1	.286E-1	.289E-1	.303E-1
.342E-1	.349E-1	.363E-1	.381E-1	.392E-1	.440E-1	.488E-1	.516E-1	.612E-1	.867E-1
.113E+0	.114E+0	.123E+0	.135E+0	.146E+0	.159E+0	.194E+0	.199E+0	.380E+0	.159E+1
$\hat{\lambda}_4$ empirikus eloszlása									
.169E-1	.170E-1	.176E-1	.206E-1	.236E-1	.242E-1	.262E-1	.270E-1	.277E-1	.291E-1
.331E-1	.351E-1	.354E-1	.368E-1	.386E-1	.393E-1	.404E-1	.409E-1	.433E-1	.520E-1
.578E-1	.585E-1	.590E-1	.640E-1	.700E-1	.702E-1	.709E-1	.752E-1	.765E-1	.778E-1
.781E-1	.788E-1	.791E-1	.879E-1	.925E-1	.101E+0	.106E+0	.110E+0	.111E+0	.112E+0
.113E+0	.117E+0	.125E+0	.140E+0	.144E+0	.176E+0	.179E+0	.199E+0	.203E+0	.203E+0
.225E+0	.228E+0	.232E+0	.239E+0	.247E+0	.325E+0	.332E+0	.340E+0	.349E+0	.358E+0
.380E+0	.413E+0	.438E+0	.449E+0	.526E+0	.549E+0	.552E+0	.608E+0	.639E+0	.678E+0
.688E+0	.714E+0	.820E+0	.906E+0	.927E+0	.938E+0	.102E+1	.109E+1	.114E+1	.117E+1
.137E+1	.139E+1	.141E+1	.148E+1	.148E+1	.167E+1	.185E+1	.207E+1	.233E+1	.319E+1
.406E+1	.424E+1	.482E+1	.489E+1	.500E+1	.561E+1	.632E+1	.661E+1	.109E+2	.245E+2
$\tilde{\lambda}_1$ empirikus eloszlása									
.560E+0	.941E+0	.980E+0	.112E+1	.125E+1	.129E+1	.130E+1	.139E+1	.144E+1	.146E+1
.146E+1	.152E+1	.153E+1	.157E+1	.177E+1	.189E+1	.196E+1	.196E+1	.200E+1	.202E+1
.213E+1	.221E+1	.223E+1	.230E+1	.240E+1	.241E+1	.267E+1	.273E+1	.274E+1	.274E+1
.282E+1	.296E+1	.300E+1	.300E+1	.305E+1	.311E+1	.313E+1	.318E+1	.322E+1	.322E+1
.328E+1	.329E+1	.332E+1	.333E+1	.340E+1	.341E+1	.347E+1	.360E+1	.369E+1	.378E+1
.381E+1	.385E+1	.423E+1	.431E+1	.434E+1	.439E+1	.483E+1	.484E+1	.486E+1	.487E+1
.499E+1	.520E+1	.523E+1	.542E+1	.545E+1	.550E+1	.556E+1	.557E+1	.600E+1	.602E+1
.612E+1	.614E+1	.637E+1	.696E+1	.704E+1	.735E+1	.744E+1	.795E+1	.828E+1	.838E+1
.842E+1	.893E+1	.903E+1	.919E+1	.935E+1	.980E+1	.102E+2	.107E+2	.108E+2	.116E+2
.119E+2	.120E+2	.128E+2	.131E+2	.134E+2	.137E+2	.141E+2	.168E+2	.176E+2	.259E+2
$\tilde{\lambda}_3$ empirikus eloszlása									
.470E+0	.527E+0	.535E+0	.602E+0	.654E+0	.682E+0	.684E+0	.752E+0	.803E+0	.855E+0
.877E+0	.956E+0	.994E+0	.103E+1	.109E+1	.110E+1	.111E+1	.147E+1	.150E+1	.153E+1
.154E+1	.162E+1	.165E+1	.169E+1	.172E+1	.193E+1	.194E+1	.195E+1	.197E+1	.206E+1
.213E+1	.216E+1	.221E+1	.223E+1	.238E+1	.252E+1	.260E+1	.291E+1	.295E+1	.300E+1
.313E+1	.323E+1	.336E+1	.338E+1	.352E+1	.357E+1	.365E+1	.374E+1	.377E+1	.409E+1
.432E+1	.466E+1	.471E+1	.508E+1	.512E+1	.561E+1	.573E+1	.580E+1	.593E+1	.631E+1
.669E+1	.734E+1	.746E+1	.781E+1	.981E+1	.106E+2	.107E+2	.143E+2	.149E+2	.157E+2
.174E+2	.175E+2	.193E+2	.197E+2	.202E+2	.219E+2	.220E+2	.224E+2	.233E+2	.238E+2
.246E+2	.264E+2	.319E+2	.425E+2	.480E+2	.557E+2	.619E+2	.720E+2	.922E+2	.118E+3
.123E+3	.138E+3	.161E+3	.328E+3	.405E+3	.541E+3	.696E+3	.951E+3	.222E+4	.523E+4

A táblázatok értékelése alapján látható, hogy a statisztikai gyakorlatban leginkább használt $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$, $\hat{\lambda}_3$ becslések nem megfelelőek és nem használhatók konfidencia intervallumok szerkesztésére. A $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_3$ becslések $\lambda \sim 0$ esetén igen nagy százalékban negatív értéket szolgáltatnak, míg $\hat{\lambda}_2$ értékei nem kerülhetnek közel 0-hoz. A becslések megbízhatatlanságára vonatkozó megjegyzés, ha a folyamat közel szinguláris, szerepel Box-Jenkins [1] könyvében (lásd 65. o.). A különböző korrelációs függvény becslésekkel Parzen [1] foglalkozott több cikkében. A szimulációs eredmények alapján látható, hogy egyenletesen jó becslések nem nyerhetők a leg-egyszerűbb esetben sem, így a különböző javaslatok nem vezetnek jó becslésekhez.

A $\hat{\lambda}_4$ és $\hat{\lambda}_5$ becslések jó egyezése első pillanatban meglepő csak, mivel a $\hat{\lambda}_4$ becslésből adódó $\hat{\rho}_4$ becslést az időben diszkrét idősorok elméletében nem szokás használni. A $\hat{\rho}_4$ becslés használata, amennyiben a megfelelő eloszlás kiszámítása is megtörténik, jóval elterjedtebbé kell, hogy váljon. A $\hat{\lambda}_5$ (maximum likelihood) becslés eloszlásának jó egyezése az elméletileg számított értékkel az imitálási eljárás megbízhatóságát, valamint az invariancia elv jó használhatóságát mutatja 60 – 100 megfigyelési pont esetén is. (A $T = 20$ megfigyelési pont esetén adódó ingadozások jóval nagyobbaknak mutatkoztak, mint $T = 60$, ill. $T = 100$ esetén).

Az időben folytonos eset $\hat{\lambda}_4$ becslésének jóságával és torzításával foglalkozik A.A. Novikov [1] dolgozatában.

3. §. KÉT ISMERETLEN PARAMÉTER ESETE

Ha a Gauss-Markov folyamat mindkét paramétere (m, λ) ismeretlen, a következő becsléseket használtuk:

$$(3.1) \quad \tilde{m}_1 = \frac{1}{T+1} \sum_0^T \xi_i, \quad \tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{2 \left[\frac{1}{T+1} \sum_0^T \xi_i^2 - \left(\frac{1}{T+1} \sum_0^T \xi_i \right)^2 \right]}$$

(3.2) $\tilde{m}_2, \tilde{\lambda}_2$ az (1.5') képletek alapján a diszkrét esetre vonatkozó maximum likelihood becslésekből adódnak ($\tilde{\lambda}_2 = -T \log \tilde{\rho}_2$).

$$(3.3) \quad \tilde{m}_3 = \frac{\xi(0) + \xi(T)}{2}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \frac{2}{(\xi(T) - \xi(0))^2}.$$

A

$$\tilde{\rho}_4 = \frac{\sum_1^T (\xi_i - \tilde{m}_1)(\xi_{i-1} - \tilde{m}_1)}{\sum_1^T (\xi_i - \tilde{m}_1)^2}$$

$$\tilde{\rho}_5 = \frac{\sum_1^T (\xi_i - \tilde{m}_1)(\xi_{i-1} - \tilde{m}_1)}{\sum_0^T (\xi_i - \tilde{m}_1)^2} \cdot \frac{T+1}{T}$$

becslések vizsgálatát is elvégeztük. Mivel lényegesen új elemet nem tartalmaztak a megfelelő egy ismeretlen paramétert tartalmazó esettel szemben, az eredmények közlésétől eltekintünk.

A programban – mivel ez elegendő – mindig az $m = 0$ paraméter becslését végeztük. A II. táblázatban megadjuk az \tilde{m}_{ik} ($i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, \dots, 100$) becslések $\tilde{M}_i = \frac{1}{100} \sum_1^{100} \tilde{m}_{ik}$ empirikus várható értékeinek és $\tilde{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{99} \sum_1^{100} (\tilde{m}_{ik} - M_i)^2}$ empirikus szórásiának átlagait ($M_i = \frac{1}{K} \sum_1^K \tilde{M}_i$, $\sigma_i = \frac{1}{K} \sum_1^K \tilde{\sigma}_i$, ahol K a lefuttatott 100-as minták száma adott (λ, T) értékek mellett). A több százás minta választásában s nem egy – mondjuk 1000-es – nagy minta vizsgálatában számítástechnikai megoldások játszottak közre.

Amint az eredményekből látható, az \tilde{m}_i becslések ($i = 1, 2, 3$) nem mutatnak lényeges eltérést a $0 < \lambda \leq 10$ intervallumban. Az \tilde{m}_i becslések közel normális eloszlásúak $(0, 1/2\lambda)$ paraméterekkel (de nem $1/2\hat{\lambda}$ paraméterrel!).

II. táblázat

λ		M_1	σ_1	M_2	σ_2	M_3	σ_3
		(1)(1)	(1)(1)	(1)(1)	(1)(1)	(1)(1)	(1)(1)
0.000001	T= 20	-91.23	743.88	-91.22	743.68	-91.23	743.88
	60	-44.38	730.66	-44.39	730.67	-44.39	730.66
	100	—	—	—	—	—	—
		(1)(1)(1)	(1)(1)(1)	(1)(1)(1)	(1)(1)(1)	(1)(1)(1)	(1)(1)(1)
0.00001	T= 20	-12.40	239.33	-12.39	239.33	-12.36	239.33
	60	12.46	194.78	12.48	194.76	12.49	194.76
	100	7.79	202.22	7.79	202.22	7.76	202.22
		(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)
0.0001	T= 20	-7.70	73.29	-7.70	73.28	-7.69	73.27
	60	3.72	70.83	3.73	70.83	3.72	70.84
	100	3.11	68.93	3.10	68.33	3.09	69.93
		(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
0.001	T= 20	0.38	22.20	0.39	22.19	0.39	22.19
	60	-0.51	22.55	-0.51	22.55	-0.51	22.55
	100	-0.07	22.06	-0.07	22.06	-0.08	22.06
		(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
0.01	T= 20	0.31	7.46	0.31	7.45	0.32	7.44
	60	0.07	8.72	0.07	7.17	0.07	7.16
	100	-0.14	7.11	-0.34	7.09	-0.33	7.08
		(8)(8)(7)	(8)(8)(7)	(8)(8)(7)	(8)(8)(7)	(8)(8)(7)	(8)(8)(7)
0.1	T= 20	0.07	2.12	0.07	2.11	0.08	2.10
	60	0.003	2.16	0.005	2.15	0.014	2.15
	100	0.03	2.26	0.03	2.25	0.013	2.24
		(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
0.5	T= 20	1.11	1.55	0.73	1.54	2.76	4.27
	60	1.09	1.67	0.71	1.65	2.78	3.84
	100	1.11	1.56	0.73	1.54	2.52	3.23
		(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)
1.0	T= 20	2.85	2.86	2.85	2.86	5.30	8.27
	60	3.12	3.13	3.12	3.13	5.61	7.99
	100	2.98	3.11	2.98	3.11	5.13	8.41
		(5)(5)(3)	(5)(5)(3)	(5)(5)(3)	(5)(5)(3)	(5)(5)(3)	(5)(5)(3)
2.0	T= 20	0.0014	0.38	-0.002	0.36	0.009	0.35
	60	0.02	0.33	0.02	0.32	0.02	0.37
	100	-0.004	0.40	-0.01	0.38	-0.03	0.39
		(3)(3)(3)	(3)(3)(3)	(3)(3)(3)	(3)(3)(3)	(3)(3)(3)	(3)(3)(3)
3.0	T= 20	0.009	0.29	0.013	0.27	0.003	0.30
	60	0.01	0.26	0.010	0.24	0.017	0.29
	100	0.006	0.30	0.005	0.29	-0.001	0.32
		(2)(2)(1)	(2)(2)(1)	(2)(2)(1)	(2)(2)(1)	(2)(2)(1)	(2)(2)(1)
5.0	T= 20	-0.013	0.17	-0.013	0.16	-0.003	0.21
	60	0.010	0.15	0.013	0.16	0.014	0.23
	100	-0.001	0.20	0.003	0.19	-0.001	0.23
		(4)(4)(4)	(4)(4)(4)	(4)(4)(4)	(4)(4)(4)	(4)(4)(4)	(4)(4)(4)
10.0	T= 20	-0.003	0.09	-0.003	0.09	-0.007	0.16
	60	0.0003	0.09	-0.0003	0.09	0.003	0.16
	100	0.0003	0.10	0.0003	0.10	-0.006	0.17

A táblázatban az egyes (λ, T) értékekhez tartozó M_i, σ_i értékek felett zárójelben megadjuk a 100-as minták (realizációk) számát is, amelyekből átlagolással adódik M_i, σ_i .

A III. táblázatokban fix λ és T értékek mellett a $\tilde{\lambda}_{ik}$ ($i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, 100$) becslésekből adódó $\tilde{F}_{i,100}$ empirikus eloszlásfüggvények p kvantilisei átlagait adjuk meg.

$$\tilde{F}_{i,100}(x) = \frac{k}{100}, \quad \text{ha } \tilde{\lambda}_{i,k} \leq x < \lambda_{i,k+1} \quad (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, 100)$$

és λ_p definíciója: $\tilde{F}_{i,100}(\lambda_p) = p$.

III.1.táblázat ($p = 0.01$)
A táblázatban szereplő z értékre: $P_{\lambda, m} \{ \tilde{\lambda}_i \leq z \} = 0.01$.

$\lambda \backslash \tilde{\lambda}_i$		$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
0.000001	T= 20	0.48 (3)	0.24 (3)	0.20 (3)
	60	0.76 (2)	0.33 (2)	0.28 (2)
	100	—	—	—
0.00001	T= 20	0.54 (6)	0.27 (6)	0.22 (6)
	60	0.73 (6)	0.36 (6)	0.31 (6)
	100	0.63 (7)	0.32 (7)	0.30 (7)
0.0001	T= 20	0.56 (12)	0.32 (12)	0.26 (12)
	60	0.63 (11)	0.29 (11)	0.28 (11)
	100	0.60 (11)	0.30 (11)	0.30 (11)
0.001	T= 20	0.55 (18)	0.30 (18)	0.23 (18)
	60	0.63 (18)	0.33 (18)	0.26 (18)
	100	0.61 (18)	0.31 (18)	0.30 (18)
0.01	T= 20	0.58 (14)	0.30 (14)	0.25 (14)
	60	0.64 (13)	0.32 (13)	0.28 (13)
	100	0.62 (13)	0.33 (13)	0.30 (13)
0.1	T= 20	0.62 (8)	0.37 (7)	0.29 (8)
	60	0.66 (8)	0.33 (7)	0.28 (8)
	100	0.62 (7)	0.31 (7)	0.28 (7)
0.5	T= 20	0.53 (15)	0.37 (15)	0.32 (15)
	60	0.79 (14)	0.45 (14)	0.39 (14)
	100	0.69 (13)	0.45 (13)	0.39 (13)
1.0	T= 20	0.79 (13)	0.52 (13)	0.39 (13)
	60	0.92 (13)	0.56 (13)	0.44 (13)
	100	0.97 (12)	0.55 (12)	0.45 (12)
2.0	T= 20	1.03 (10)	0.86 (10)	0.61 (10)
	60	1.18 (9)	0.99 (9)	0.71 (9)
	100	1.07 (8)	0.84 (8)	0.65 (8)
3.0	T= 20	1.38 (13)	1.08 (13)	0.85 (13)
	60	1.55 (13)	1.25 (13)	0.88 (13)
	100	1.48 (13)	1.35 (13)	0.96 (13)
4.0	T= 20	1.89 (10)	1.35 (10)	0.97 (10)
	60	1.81 (10)	1.49 (10)	1.19 (10)
	100	1.93 (10)	1.69 (10)	1.22 (10)
5.0	T= 20	2.28 (12)	1.54 (11)	1.27 (12)
	60	2.36 (12)	2.19 (11)	1.82 (12)
	100	2.05 (11)	1.86 (11)	1.38 (11)
10.0	T= 20	4.41 (13)	3.59 (12)	2.91 (13)
	60	5.31 (13)	4.52 (12)	3.14 (13)
	100	4.40 (11)	4.61 (10)	2.93 (11)

III.2. táblázat ($p = 0.05$)

A táblázatban szereplő z értékre: $P_{\lambda, m} \{ \tilde{\lambda}_i \leq z \} = 0.05$

$\lambda \backslash \tilde{\lambda}_i$		$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
0.000001		(3)(2)	(3)(2)	(3)(2)
	T= 20	0.91	0.54	0.44
	60	0.99	0.69	0.60
	100	—	—	—
0.00001		(6)(6)(7)	(6)(6)(7)	(6)(6)(7)
	T= 20	0.89	0.63	0.48
	60	1.15	0.71	0.59
	100	1.13	0.55	0.49
0.0001		(11)(11)(11)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
	T= 20	1.01	0.65	0.58
	60	1.01	0.66	0.59
	100	0.88	0.59	0.50
0.001		(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
	T= 20	0.96	0.62	0.48
	60	1.05	0.72	0.57
	100	1.07	0.63	0.54
0.01		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
	T= 20	0.98	0.64	0.50
	60	1.12	0.68	0.52
	100	1.05	0.61	0.51
0.1		(8)(8)(7)	(7)(7)(7)	(8)(8)(7)
	T= 20	0.98	0.65	0.48
	60	1.00	0.68	0.57
	100	1.01	0.58	0.46
0.5		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
	T= 20	1.09	0.85	0.63
	60	1.28	0.89	0.68
	100	1.19	0.77	0.64
1.0		(13)(13)(12)	(13)(13)(12)	(13)(13)(12)
	T= 20	1.27	1.02	0.71
	60	1.42	1.08	0.77
	100	1.33	1.01	0.79
2.0		(10)(9)(8)	(10)(9)(8)	(10)(9)(8)
	T= 20	1.72	1.49	1.12
	60	1.91	1.61	1.18
	100	1.78	1.38	1.23
3.0		(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
	T= 20	2.17	2.06	1.61
	60	2.37	2.04	1.68
	100	2.15	2.00	1.51
4.0		(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
	T= 20	2.74	2.30	1.90
	60	2.91	2.54	2.08
	100	2.65	2.44	2.16
5.0		(12)(12)(11)	(11)(11)(11)	(12)(12)(11)
	T= 20	3.43	2.83	2.46
	60	3.62	3.31	2.65
	100	2.97	2.89	2.26
10.0		(13)(13)(11)	(12)(12)(10)	(13)(13)(11)
	T= 20	6.11	5.30	5.43
	60	6.77	6.56	5.40
	100	5.95	6.38	4.92

III.3. táblázat ($p = 0.1$)

A táblázatban szereplő z értékre: $P_{\lambda, m} \{ \tilde{\lambda}_i \leq z \} = 0.1$

$\lambda \backslash \tilde{\lambda}_i$		$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
		(3)(2)	(3)(3)	(3)(3)
0.000001	T= 20	1.19	0.89	0.64
	60	1.55	1.07	0.86
	100	—	—	—
		(6)(6)(7)	(6)(6)(7)	(6)(6)(7)
0.00001	T= 20	1.15	0.92	0.71
	60	1.44	0.97	0.81
	100	1.42	0.87	0.69
		(11)(11)(11)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
0.0001	T= 20	1.29	0.95	0.71
	60	1.40	0.99	0.78
	100	1.39	0.94	0.71
		(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
0.001	T= 20	1.22	0.94	0.67
	60	1.45	1.19	0.81
	100	1.39	0.88	0.75
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
0.01	T= 20	1.25	0.94	0.69
	60	1.51	1.04	0.75
	100	1.47	0.96	0.75
		(8)(8)(7)	(7)(7)(7)	(8)(8)(7)
0.1	T= 20	1.25	0.91	0.61
	60	1.45	0.98	0.81
	100	1.38	0.99	0.85
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
0.5	T= 20	1.44	1.12	0.87
	60	1.64	1.30	0.98
	100	1.56	1.08	0.89
		(13)(13)(12)	(13)(13)(12)	(13)(13)(12)
1.0	T= 20	1.63	1.39	1.01
	60	1.85	1.47	1.15
	100	1.74	1.40	1.11
		(10)(9)(8)	(10)(9)(8)	(10)(9)(8)
2.0	T= 20	2.17	2.02	1.51
	60	2.36	2.14	1.69
	100	2.13	1.86	1.58
		(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
3.0	T= 20	2.70	2.36	2.27
	60	2.93	2.67	2.25
	100	2.83	2.55	2.20
		(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
4.0	T= 20	2.88	2.32	2.15
	60	3.53	3.22	2.94
	100	3.37	2.96	2.90
		(12)(12)(11)	(11)(11)(11)	(12)(12)(11)
5.0	T= 20	4.09	3.62	3.41
	60	4.22	4.02	3.80
	100	3.80	3.61	3.37
		(13)(13)(11)	(12)(12)(10)	(13)(13)(11)
10.0	T= 20	7.12	6.58	7.28
	60	7.78	7.69	7.67
	100	7.22	7.40	5.71

III.4. táblázat ($p = 0.5$)

A táblázatban szereplő z értékre: $P_{\lambda,m}\{\tilde{\lambda} \leq z\} = 0.5$

$\lambda \backslash \tilde{\lambda}_i$		$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
		(3)(2)	(3)(2)	(3)(2)
0.000001	T= 20	3.54	3.65	3.56
	60	4.33	3.99	3.59
	100	—	—	—
		(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)
0.00001	T= 20	3.55	3.46	3.44
	60	4.27	3.87	4.82
	100	3.99	3.39	4.61
		(11)(11)(11)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
0.0001	T= 20	3.58	3.56	3.87
	60	4.25	3.51	4.18
	100	4.20	3.84	4.44
		(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
0.001	T= 20	3.59	3.53	3.66
	60	4.26	3.91	5.27
	100	4.00	3.46	4.21
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
0.01	T= 20	3.61	3.57	3.77
	60	4.19	3.66	5.29
	100	3.89	3.39	4.20
		(8)(8)(7)	(7)(7)(7)	(8)(8)(7)
0.1	T= 20	3.71	3.46	3.18
	60	4.17	4.03	5.15
	100	4.22	3.68	4.87
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
0.5	T= 20	3.89	3.71	5.28
	60	4.41	4.44	5.95
	100	4.17	4.12	5.08
		(13)(13)(12)	(13)(13)(12)	(13)(13)(12)
1.0	T= 20	4.28	4.94	6.26
	60	4.84	4.87	7.83
	100	4.65	4.40	7.46
		(10)(9)(8)	(10)(9)(8)	(10)(9)(8)
2.0	T= 20	4.79	5.74	8.44
	60	5.62	5.73	11.15
	100	5.44	5.36	9.51
		(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
3.0	T= 20	5.98	6.79	13.62
	60	6.58	6.69	13.99
	100	6.34	6.49	10.20
		(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
4.0	T= 20	6.96	7.21	16.00
	60	7.38	7.26	23.04
	100	7.03	7.00	16.99
		(12)(12)(11)	(11)(11)(11)	(12)(12)(11)
5.0	T= 20	8.02	8.53	20.25
	60	8.29	8.61	22.71
	100	8.22	8.23	22.20
		(13)(13)(13)	(12)(12)(12)	(13)(13)(13)
10.0	T= 20	12.36	13.41	46.97
	60	12.79	13.68	42.05
	100	12.98	13.18	33.29

III.5. táblázat ($p = 0.9$)

A táblázatban szereplő z értékre: $P_{\lambda, m} \{ \tilde{\lambda}_i \leq z \} = 0.9$

$\lambda \backslash \tilde{\lambda}_i$		$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
		(3)(2)	(3)(2)	(3)(2)
0.000001	T= 20	8.87	9.86	67.08
	60	10.29	10.14	147.8
	100	—	—	—
		(6)(6)(7)	(6)(6)(7)	(6)(6)(7)
0.00001	T= 20	9.203	10.85	94.25
	60	10.34	10.46	131.72
	100	10.04	9.77	116.30
		(11)(11)(11)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
0.0001	T= 20	9.36	11.07	123.50
	60	10.47	10.76	158.07
	100	10.49	10.24	127.95
		(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
0.001	T= 20	9.71	10.91	109.4
	60	10.59	10.86	144.7
	100	10.09	9.46	130.7
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
0.01	T= 20	9.10	10.87	173.2
	60	10.74	11.58	151.3
	100	10.25	9.92	111.7
		(8)(8)(7)	(7)(7)(7)	(8)(8)(7)
0.1	T= 20	8.27	9.36	96.18
	60	10.76	11.21	157.01
	100	10.28	10.41	179.70
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
0.5	T= 20	9.12	12.47	144.2
	60	10.39	10.94	298.5
	100	9.61	10.37	159.3
		(13)(13)(12)	(13)(13)(12)	(13)(13)(12)
1.0	T= 20	10.13	14.06	170.5
	60	10.97	12.70	217.4
	100	11.35	11.34	326.3
		(10)(9)(8)	(10)(9)(8)	(10)(9)(8)
2.0	T= 20	10.82	12.50	296.38
	60	11.52	13.02	298.07
	100	11.87	12.24	425.50
		(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
3.0	T= 20	12.54	16.04	362.9
	60	13.02	14.32	405.7
	100	13.36	14.18	409.1
		(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
4.0	T= 20	13.35	16.54	399.58
	60	14.61	15.44	522.75
	100	14.38	14.91	775.97
		(12)(12)(11)	(11)(11)(11)	(12)(12)(11)
5.0	T= 20	15.95	21.02	605.3
	60	16.09	16.97	674.7
	100	16.43	17.36	602.4
		(13)(13)(11)	(12)(12)(10)	(13)(13)(11)
10.0	T= 20	22.12	29.87	1010.9
	60	21.48	22.56	4887.7
	100	22.42	23.61	1330.5

III.6. táblázat ($p = 0.95$)

A táblázatban szereplő z értékre: $P_{\lambda, m} \{ \tilde{\lambda}_i \leq z \} = 0.95$

$\lambda \backslash \tilde{\lambda}_i$		$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
		(3)(2)	(3)(2)	(3)(2)
0.000001	T= 20	10.51	13.75	184.00
	60	12.64	13.13	1166.6
	100	—	—	—
		(6)(6)(7)	(6)(6)(7)	(6)(6)(7)
0.00001	T= 20	12.34	15.62	199.85
	60	12.21	11.95	650.80
	100	12.58	12.68	397.70
		(11)(11)(11)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
0.0001	T= 20	12.05	14.77	408.1
	60	12.89	13.30	518.1
	100	12.98	13.25	423.3
		(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
0.001	T= 20	12.18	14.74	528.4
	60	12.07	13.21	690.4
	100	12.36	12.82	377.5
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
0.01	T= 20	11.05	15.14	522.2
	60	13.41	13.85	464.9
	100	12.74	12.63	529.1
		(8)(8)(7)	(7)	(8)(8)(7)
0.1	T= 20	10.80	12.21	321.38
	60	12.92	13.89	802.03
	100	14.62	14.95	709.50
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
0.5	T= 20	11.49	15.56	638.9
	60	12.01	13.53	527.6
	100	12.16	12.34	596.1
		(13)(13)(12)	(13)(13)(12)	(13)(13)(12)
1.0	T= 20	12.81	18.67	452.3
	60	13.45	16.35	637.5
	100	13.47	14.33	1167.8
		(10)(9)(8)	(10)(9)(8)	(10)(9)(8)
2.0	T= 20	12.77	18.32	131.3
	60	14.03	15.94	1946.5
	100	13.87	14.78	2039.3
		(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
3.0	T= 20	15.57	22.67	1583.0
	60	15.63	17.66	1149.8
	100	15.29	16.80	2104.8
		(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
4.0	T= 20	17.10	23.55	1856.9
	60	17.12	17.36	3808.1
	100	17.05	17.86	3481.4
		(12)(12)(11)	(11)(11)(11)	(12)(12)(11)
5.0	T= 20	19.11	27.11	2125.9
	60	19.15	20.08	3318.1
	100	19.14	19.94	3530.5
		(13)(13)(11)	(12)(12)(10)	(13)(13)(11)
10.0	T= 20	26.14	39.85	4037.6
	60	22.84	26.52	5078.3
	100	23.18	26.74	3949.9

III.7. táblázat (az eloszlások várható értékei)

$\lambda \backslash \tilde{\lambda}_1$		$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
		(3)(2)	(3)(3)	(3)(3)
0.000001	T= 20	4.53	4.96	95.60
	60	5.64	5.58	260.69
	100	—	—	—
		(6)(6)(7)	(6)(6)(7)	(6)(6)(7)
0.00001	T= 20	4.78	5.28	203.54
	60	5.24	5.07	385.40
	100	5.09	4.75	814.60
		(11)(11)(11)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
0.0001	T= 20	5.45	5.61	275742.6
	60	5.35	5.21	836.2
	100	5.18	4.86	3277.8
		(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
0.001	T= 20	4.71	5.18	1906.5
	60	4.83	5.22	30034.1
	100	5.05	4.70	1239.7
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
0.01	T= 20	4.79	5.50	10576.2
	60	5.50	5.41	1452.7
	100	5.03	4.72	3198.7
		(8)(8)(7)	(7)(7)(7)	(8)(8)(7)
0.1	T= 20	4.51	4.71	5537.2
	60	5.44	5.25	4503.1
	100	5.41	5.12	5105.6
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
0.5	T= 20	4.90	7.13	996.5
	60	5.34	5.66	20954.5
	100	5.24	4.99	833138.0
		(13)(13)(12)	(13)(13)(12)	(13)(13)(12)
1.0	T= 20	5.31	6.93	3835.6
	60	5.72	6.31	3280.1
	100	5.72	5.63	10771.6
		(10)(9)(8)	(10)(9)(8)	(10)(9)(8)
2.0	T= 20	5.87	7.90	1353129.3
	60	6.46	6.97	3147.9
	100	6.51	6.54	5729.2
		(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
3.0	T= 20	7.14	11.05	1651.0
	60	7.45	7.94	945.6
	100	7.60	7.59	5588.2
		(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
4.0	T= 20	8.12	11.05	8753.1
	60	8.51	8.56	16887.6
	100	4.11	4.14	2735056.6
		(12)(12)(11)	(11)(11)(11)	(12)(12)(11)
5.0	T= 20	9.37	14.38	34963.8
	60	9.46	9.78	10670.4
	100	9.46	9.56	149051.5
		(13)(13)(11)	(12)(12)(11)	(13)(13)(11)
10.0	T= 20	13.97	20.52	13006.2
	60	13.77	14.81	198922.2
	100	14.05	14.74	13966.6

Az ismert $m = 0$ esettel szemben, amikor is a maximum likelihood és az integrál közelítéséből adódó becslések ($\hat{\lambda}_5$ és $\hat{\lambda}_4$) jó közelítéssel megegyeztek, ismeretlen m esetén a $\tilde{\lambda}_1$ és $\tilde{\lambda}_2$ becslések $\lambda < 1$ esetén jól megkülönböztethetők. $\tilde{\lambda}_1$ p -kvantilisét $x_p(\tilde{\lambda}_1)$ -vel jelölve igaz, hogy $p < 1/2$ esetén $x_p(\tilde{\lambda}_1) > x_p(\tilde{\lambda}_2)$, míg $p > 1/2$ esetén $x_p(\tilde{\lambda}_1) < x_p(\tilde{\lambda}_2)$. A $\tilde{\lambda}_3$ becslés alsó kvantilisei jó egyezést mutatnak a $\tilde{\lambda}_2$ alsó kvantiliseivel, míg a $p > 1/2$ esetben $x_p(\tilde{\lambda}_3) \gg x_p(\tilde{\lambda}_2)$. Mivel $x_p(\tilde{\lambda}_3)$ $\lambda \sim 0$ esetén az 1 szabadságfokú χ^2 eloszlás kvantiliseivel jól közelíthető, ahonnan a következő kis táblázatot kapjuk:

p	0.001	0.01	0.05	0.1	0.5	0.9	0.95	0.98
$x_p(\tilde{\lambda}_1)$	0.19	0.30	0.52	0.74	4.38	125.0	500.0	2000.0

A III. táblázatok eredményeivel való összehasonlításból látható, hogy a szimuláció eredményei ismét jó egyezést mutatnak az elméletileg kiszámolt értékekkel.

A III. táblázatok eredményeiből látható, hogy a $\tilde{\lambda}_1$ becslések $\lambda < 1$ esetén nemcsak, hogy nem torzítatlanok, hanem becslésre és konfidencia intervallum szerkesztésre sem használhatók.

A megfigyelésszám (T) növelésének kérdését a tapasztalatok alapján döntöttük el. Az I. 8 és I. 9 táblázatokból látható, hogy $T = 100$ megfigyelés elegendő a $\lambda \leq 10$ paraméter-tartományban.

A táblázatok alapján – amikor az lehetséges – konfidencia határokat is adhatunk mind az m , mind a λ paraméterekre. Adott $p (< 1/2)$ értékre és a $\tilde{\lambda}_1$ becslésre megkeressük azt a $(\underline{\lambda}, p)$ értékpárt, melyre $x_{p,\underline{\lambda}} = \tilde{\lambda}_1$ s ekkor $\underline{\lambda}$ lesz az alsó konfidencia határ p -szinten. A III. táblázatok eredményei alapján látható annak az elméletileg igen érdekes tételnek az igazsága (lásd pl. Arató.[1]), hogy a λ paraméterre nem szerkeszthető 0-tól különböző alsó konfidencia határ.

A táblázatok eredményeiből látható, hogy a $\tilde{\lambda}_2$ maximum likelihood becslések alsó kvantilisei kisebbek a $\tilde{\lambda}_1$ alsó kvantiliseinél, s ebben az értelemben kevésbé torzított becslései λ -nak. (Az $m = 0$ esetben ilyen különbség nem volt tapasztalható).

4. §. A PROGRAM ISMERTETÉSE.

Az alábbiakban megadjuk a szimulálási eljárás FORTRAN nyelven írott programját. A program fordításakor beolvasható λ és a kezdő véletlen szám értéke.


```
PROGRAM BECSLOE
C BECSULT PARAMETEREK EMPIRIKUS ELOSZLASA
REAL MU2T,MUA,MURA
REAL MU1,MU2,MU3,LA,LAB1,LAB2,LAB3,MURO1,
1 LAMU3,LAB1A,LAB2A,LAB3A,LAB1S,LAB2S,LAB3S
REAL MUR1S,MUR2S,MUR3S,LAMU1A,LAMU2A,
DIMENSION LAB1(100),LAB2(100),LAB3(100),
2 MURO1(100),LAMU1(100),LAMU2(100),LAMU3(100)
C LAB1 AFELTETELES MAXLIKELIHOOD BECSLES, LAB2
C PER2 INTEGRAL, CSAK LA ISMERETLEN
C MURO1 LA BECSLES NOVIKOV MODSZERREL
C MURO2 LA BECSLES IDOBEN FOLYTONOS MAX.LIK
INTEGER T
READ 400,N0
400 FORMAT(I5)
DO 1 I=1,N0
CALL RND3(ALF)
1 CONTINUE
READ 500,LA
500 FORMAT(F10.8)
CON=SQRT(4.8)
T=100
RO=EXP(-LA/T)
RO2=RO*RC
CO=SQRT((1.-RO2)/(2*LA))
PRINT 5,T,N0,LA,RO,RO2
5 FORMAT(1F0,3H T=,I6,3HN0=,I5,4H LA=,E14.8)
LAB1A=0
LAB2A=0
LAB3A=0
LAB1S=0
LAB2S=0
LAB3S=0
MUR1A=0
MUR2A=0
MUR3A=0
MUR1S=0
MUR2S=0
MUR3S=0
LAMU1A=0
LAMU2A=0
LAMU3A=0
LAMU1S=0
LAMU2S=0
LAMU3S=0
DO 80 J=1,100
CALL NCRMVC(EPS)
EPS=(EPS-7.5)*CON
EPS=EPS+(EPS**3-3*EPS)*0.005
X0=EPS/SQRT(2*LA)
MU1=X0
MU2=0
MU3=0
X1=X0
```

```
DO 10 I=1,T
CALL NCRMVC(EPS)
EPS=(EFS-7.5)*CON
EPS=EPS+(EPS**3-3*EPS)*0.005
X2=X1*R0+EPS*CO
MU1=MU1+X2
MU2=MU2+X2*X2
MU3=MU3+X2*X1
X1=X2
10 CONTINUE
MU2T=MU2-X2*X2
MUA=MU1/(T+1)
LAB1(J)=-T*ALOG(MU3/MU2)
CALL RC2SZA(R0,MU2T,MU3,CO,R3K)
LAB2(J)=-T*ALOG(R3K)
LAB3(J)=0.5*T/MU2
MU2=MU2+X0*X0
AL=MU3/ML2
AI2=2*MU2/(T+1)
AI1=0.5*(1-X0*X0-X2*X2)
MURO1(J)=0.5*(T+1)*((1+X0*X0-X2*X2)/MU2)
MURO2(J)=(AI1+SQRT(AI1*AI1+AI2))/AI2
LAB1A=LAB1A+LAB1(J)
LAB2A=LAB2A+LAB2(J)
LAB3A=LAB3A+LAB3(J)
LAB1S=LAB1S+LAB1(J)**2
LAB2S=LAB2S+LAB2(J)**2
LAB3S=LAB3S+LAB3(J)**2
MUR1A=MURO1(J)+MUR1A
MUR2A=MURO2(J)+MUR2A
MUR3A=MURO3(J)+MUR3A
MUR1S=MUR1S+MURO1(J)**2
MUR2S=MUR2S+MURO2(J)**2
MUR3S=MUR3S+MURO3(J)**2
CALL RENDEZ(MURO1,J)
CALL RENDEZ(MURO2,J)
CALL RENDEZ(LAB1,J)
CALL RENDEZ(LAB2,J)
CALL RENDEZ(LAB3,J)
80 CONTINUE
LAB1A=LAB1A/100
LAB2A=LAB2A/100
LAB3A=LAB3A/100
MUR1A=MUR1A/100
MUR2A=MUR2A/100
LAB1S=SQRT(LAB1S/99-(100/99)*LAB1A**2)
LAB2S=SQRT(LAB2S/99-(100/99)*LAB2A**2)
LAB3S=SQRT(LAB3S/99-(100/99)*LAB3A**2)
MUR1S=SQRT(MUR1S/99-(100/99)*MUR1A**2)
MUR2S=SQRT(MUR2S/99-(100/99)*MUR2A**2)
PRINT UTASITASOK
END
```


I r o d a l o m

- [1] M. Arató: [1] (1962) Оценка параметров стационарного гауссовского марковского процесса ДОКЛ.А.Н. 145 №1. 13-16.
- [2] Arató M: [2] (1964) Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálatáról I., MTA III. Oszt. Közleményei 14, 13-34.
- [3] M. Arató — A. Benczúr: [1] (1970) Функция распределения оценки параметра затухания стационарного гауссовского марковского процесса. Studia Sci. Math. Hung, No 3-4, 445-456.
- [4] Benczúr A.: [1] (1971) Stacionárius Gauss-Markov folyamat csillapodási paraméterének konfidencia határai, MTA. Számítástechnikai Központja Közlemények No. 6, 3-14.
- [5] G. Box — G. Jenkins: [1] (1970) Time series analysis forecasting and control Holden-Day, San-Francisco.
- [6] U. Grenander: [1] (1950) Stochastic processes and statistical inference, Arkiv för Math. 1, No. 3, 195-277. (magyarul MTA. III. Oszt. Közleményei 1965, No. 1-3.)
- [7] A.A. Novikov: (1971) Об оценках параметров диффузных процессов. (Sajtó alatt a Studia Sci. Math. Hung.-ban).
- [8] E. Parzen: [1] (1967) Time series analysis for models of signal plus white noise, Spectral analysis of time series (Edited by B. Harris), John Wiley 233-257 o.
- [9] A.M. Walker: [1] (1960) Some consequences of superimposed error in time series analysis, Biometrika 47, 33-43.

Summary

Simulation results for the distribution of the parameter estimates of the elementary Gaussian process

The behaviour of the various estimates of the parameters $m = M\xi(t)$ and $\lambda (M[(\xi(t) - m) \cdot (\xi(t + \tau) - m)] = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|\tau|})$ of the stationary Gauss-Markov process is examined in the paper by the Monte Carlo method.

On the basis of the tables, given in the paper of Arató – Benczúr [1] (see furthermore Benczúr [1]), it is possible (in the case $m = 0$) to compare, in the continuous time parameter case, the maximum likelihood estimate with the estimates (2.1) – (2.5) of § 2. The tables I.1 – I.6 give the quantiles $p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95$ of the empirical distributions in the case of $T = 20, 60, 100$ observations on time interval $[0,1]$. It is remarkable, that the quantiles of the distribution of estimates

$$(2.4) \quad \hat{\lambda}_4 = \frac{T+1}{2 \sum_{i=1}^T \xi_i^2},$$

not used in the statistical literature, agree very well with the quantiles of theoretical distribution of maximum likelihood estimate.

The quantiles of the distributions of the estimates (3.1) – (3.3) are given in the tables of § 3. Table II. gives the average and dispersion of estimates of parameter m . The various estimates of m behave identically and their dispersion is near to the theoretically given value $\frac{1}{2\lambda}$ but not to the value $\frac{1}{2\hat{\lambda}}$.

It is impossible to construct lower confidence limits from estimates of parameter λ , because for given p there exists, independently from λ and estimate $\tilde{\lambda}$, such an x_p that

$$\sup_{\lambda > 0} P_{\lambda, m} \{ \tilde{\lambda} > x_p \} \geq p.$$

Numerically the x_p values were obtained theoretically only in case of the 3.3 estimates. The tables III. give the behaviour of the p ($p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95$) quantiles in the function of λ .

The empirical distribution functions were determined for samples with 100 observations. For a given pair λ, T 10-20 such empirical distribution functions were counted. The description of the program is given in § 4. In case of given parameter value and starting random number the program runs within 1-2 minutes (on a CDC 3300 computer).

Р е з ю м е

Результаты симуляции распределения оценок параметров простого процесса Гаусса

В статье рассматривается поведение разных оценок неизвестных параметров $m = M\xi(t)$ и λ (где $M[(\xi(t) - m)(\xi(t + \tau) - m)] = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|\tau|}$) стационарного гауссовского марковского процесса, с помощью метода Монте-Карло. На основе таблицы, данной в статье Arató — Benczúr [1] (или Benczúr [1]), можно сравнивать результаты Монте-Карло при оценках (2.1) — (2.5) с результатами наибольшего правдоподобия непрерывного времени (при этом предполагается $m = 0$). Таблицы I.1 — I.6 дают эмпирические квантили при $p = 0,01, 0,05, 0,1, 0,5, 0,9, 0,95$, если число наблюдений T равно 20, 60, 100. Надо подчеркнуть хорошее совпадение квантилей оценки

$$(2.4) \quad \hat{\lambda}_4 = \frac{T+1}{2 \sum_{i=0}^T \xi_i^2}$$

которую не используют в статистике, с квантилями теоретического распределения. В таблицах параграфа 3 даются эмпирические квантили оценок (3.1) — (3.3). В таблице II. даются средние значения и дисперсии разных оценок параметра m . Разные оценки ведут себя одинаково и дисперсия оценок хорошо совпадает с теоретическими значениями $\frac{1}{2\lambda}$ (но не $\frac{1}{2\tilde{\lambda}}$). Для параметра λ по оценкам нельзя построить нижние доверительные границы, так как для любой оценки $\tilde{\lambda}$ при данном p существует независимое от λ значение x_p , что

$$\sup_{\lambda > 0} P_{\lambda, m} \{ \tilde{\lambda} > x_p \} \geq p.$$

Теоретическое определение значений x_p только для оценок (3.3) удалось. Таблицы III. дают эмпирические квантили оценок (3.1) — (3.3) для параметра λ при $p = 0,01, 0,05, 0,1, 0,5, 0,9, 0,95$. Эмпирические распределения определились для выборок с размером 100. При данных λ, T готовились 10–20 эмпирических распределений. Программа на языке FORTRAN дается в параграфе 4. При данном λ программа занимает 1–2 минуты машинного времени на машине CDC 3300.

NÉHÁNY ASZIMMETRIKUS BOLYONGÁSI FELADAT

Gyurácz Németh Teréz

1. Egy egyszerű epidémiái modell kapcsán merült fel a következő bolyongási feladat:

Tekinsük a következő $\xi(t)$ $t = 0, 1, 2, \dots$ folyamatot:

$$\xi(0) = 0 \quad P\{\xi(t+1) = x+1 \mid \xi(t) = x\} = q$$

$$P\{\xi(t+1) = x-1 \mid \xi(t) = x\} = p$$

Legyen n pozitív egész szám; a τ_n valószínűségi változót definiáljuk a következőképpen:

$$\tau_n = \min\{t: \xi(t) = n\}.$$

τ_n értékei, az $x = n$ első elérésének időpontjai csak $n, n+2, \dots, n+2s, \dots$ lehetnek. Ismert (Feller 1, 86. old.), hogy

$$p(\tau_n = n+2s) = \frac{n}{n+2s} \binom{n+2s}{s} (pq)^s q^n.$$

Az $F_n(x) = P(\tau_n < x)$ eloszlásfüggvényre igaz a következő összefüggés (Feller 1, XI. fej.)

$$\lim_{l \rightarrow \infty} F_n(l) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} (pq)^k q^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } q \geq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{q}{p}\right)^n, & \text{ha } q < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

azaz valódi eloszlást csak $q \geq \frac{1}{2}$ esetén kapunk. A továbbiakban feltesszük, hogy $q > \frac{1}{2}$.

Legyen

$$(1) \quad Q(m, n, p) = P(\tau_n \geq n+2m) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{n}{n+2k} \binom{n+2k}{k} (pq)^k q^n.$$

A cél: aszimptotikus formula meghatározása $Q(m, n, p)$ -re $m \rightarrow \infty$ esetén.

Ismeretes, hogy $Q(m, n, p)$ felírható a következőképpen is

$$(2) \quad Q(m, n, p) = I_p(m, m+n-1) - \left(\frac{q}{p}\right)^n I_p(m+n, m-1),$$

ahol

$$I_p(m, n-m+1) = \sum_{k=m}^n C_n^k p^k q^{n-k},$$

azonban az $I_p(m, m+k)$ típusú binomiális összegek közelítése ($k = \text{const}$) $m \rightarrow \infty$ esetén nehézkes, mivel a Moivre-Laplace-tétel feltételei nem teljesülnek.

Az (1) összefüggésből kiindulva, a Stirling-formula alkalmazásával:

$$Q(m, n, p) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{n(2q)^n}{2\sqrt{\pi} k^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{a_n}{k} - b_p k \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right),$$

ahol a_n n -től, b_p pedig p -től függő állandó:

$$a_n = \frac{2n^2 + 6n + 1}{8}, \quad b_p = -\ln 4pq.$$

A trapéz formula alkalmazása, majd alkalmas helyettesítések után

$$Q(m, n, p) = C_{np} \left[\frac{e^{-d_{np}}}{\sqrt{2a_n}} (1 - \Phi(V_{npm})) - \frac{e^{-d_{np}}}{\sqrt{2a_n}} (1 - \Phi(U_{npm})) + R_{mnp} \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right),$$

ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény,

$$C_{np} = \frac{n(2q)^n}{\sqrt{2}}, \quad d_{np} = 2\sqrt{a_n b_p}, \quad V_{npm} = \sqrt{2mb_p} - \sqrt{\frac{2a_n}{m}},$$

$$U_{npm} = \sqrt{2mb_p} + \sqrt{\frac{2a_n}{m}}, \quad R_{mnp} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} m^{3/2}} e^{-b_p m - \frac{a_n}{m}}.$$

Felhasználva továbbá, hogy elég nagy x esetén a $\Phi(x)$ normális eloszlásfüggvény és $\varphi(x)$ sűrűségfüggvénye között a következő kapcsolat áll fenn:

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{x} \varphi(x) \left(1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right).$$

$Q(m, n, p)$ -re a következő aszimptotikus formula adódik:

$$Q(m, n, p) = \frac{C_{np}}{\sqrt{2\pi} \cdot m^{3/2}} e^{-mb_p - \frac{a_n}{m}} B_p \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right),$$

ahol $B_p = \frac{2 + b_p}{2b_p}.$

Felhasználva a $Q(m, n, p)$ -re kapott aszimptotikus összefüggést, (2) alapján $I_p(m + n - 1, m)$ -re közelítő formula adódik. Mivel

$$(3) \quad Q(m, n, p) = \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n \right) I_p(m + n - 1, m) + \sum_{k=m-n}^{m+n-2} C_{2m+n-2}^k p^k q^{2m+n-2-k},$$

továbbá

$$\sum_{k=m-1}^{m+n-2} C_{2m+n-2}^k p^k q^{2m+n-2-k} =$$

$$= C_{2m+n-2}^{m-1} p^{m-1} q^m \frac{q^n - p^n}{q - p} \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right)$$

és a (3) kifejezésben $Q(m, n, p)$ elhanyagolható a jobboldal második tagjához képest, így

$$I_p(m+n-1, m) = \frac{q}{q-p} \cdot C_{2m+n-2}^{m-1} q^{m-1} p^{m+n-1} (1 + O(\frac{1}{m})) .$$

2. Mivel számos aszimmetrikus bolyongási probléma esetén a megfelelő eloszlások kifejezhetőek $Q(m, n, p)$ ill. $I_p(m, m+k)$ segítségével, így eloszlásaihoz egyszerűen kaphatunk aszimptotikus formulákat.

Nézzünk most néhány egyszerűbb aszimmetrikus bolyongási feladatot.

Legyenek τ_0 valószínűségi változó értékei a 0-ba való első visszatérés időpontjai.

$$P(\tau_0 = 2m) = \frac{2}{m} \binom{2m-2}{m-1} p^m q^m .$$

Az $F(x) = P(\tau_0 < x)$ eloszlásfüggvényre:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = 1 - q + p$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{\infty} P(\tau_0 = 2k) &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1} p^k q^k = \\ &= 2p \sum_{k=m-1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \binom{2k+1}{k} p^k q^{k+1} = 2p Q(m-1, 1, p) \end{aligned}$$

$$P(\tau_0 \geq 2m) = 2p Q(m-1, 1, p) + q - p .$$

Legyen τ_k olyan valószínűségi változó, melynek értékei a bolyongó részecske 0-ba való pontosan k -adik visszatérésének időpontjai

$$P(\tau_k = 2n) = 2^k \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n} p^n q^n$$

$$\begin{aligned} P(\tau_k \geq m) &= \sum_{l=m}^{\infty} P(\tau_k = 2l) = \sum_{l=m}^{\infty} 2^k \frac{k}{2l-k} \binom{2l-k}{l} p^l q^l = \\ &= p^k 2^k Q(m, k, p) \end{aligned}$$

Irodalom

- [1] В. Феллер: Введение в теорию вероятностей и ее приложения.

S u m m a r y

Some asymmetrical random walk problems

There are given limit distributions of a functional for asymmetrical random walk.

Р е з ю м е

Несколько асимметричных задач блуждания

Определяются предельные теоремы для функционала от асимметричных блужданий.

GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS

Klafszky Emil

BEVEZETÉS

A *geometriai programozás* mind elméleti érdekességénél, mind a gyakorlati felhasználás szempontjából a *matematikai programozás* rendkívül gyorsan fejlődő ága. Kialakulására döntő hatással volt egyrészt a kémiai egyensúly problémának matematikai programozásként való megfogalmazása, másrészt az a felismerés, hogy az elemi optimum számítási feladatoknál nagyon jó eszköznek bizonyuló számtani-mértani közép egyenlőtlenséget a matematikai programozási feladatra is eszközként használjuk. A geometriai programozás kifejlesztésében nagy szerepet játszott **Richard J. Duffin**, **Elmer L. Peterson** és **Clarence Zener** munkássága.

A dolgozatban a geometriai programozás elméletébe kívánok egy bevezetést nyújtani, s egyúttal a geometriai programozás dualitás problémakörét összefoglalni. Más felépítésmódoktól eltérően, a tárgyalásban a *Farkas-tételre* támaszkodom, s így módon a szokásosnál egyszerűbb bizonyítás adható a dualitás-tételre. A geometriai programozás megoldó algoritmusainak tárgyalására, valamint a geometriai programozási modell alkalmazásaira itt nem térek ki, ezt egy következő dolgozatban szeretném összefoglalni. A dolgozat jelöléstechnikájában és felépítésmódjában *David Gale: "The Theory of Linear Economic Models"* c. könyvét követtem.

1. §. GEOMETRIAI EGYENLŐTLENSÉG

A geometriai programozás – mint speciális matematikai programozás – vizsgálatában fontos szerepet játszik a geometriai egyenlőtlenség. E miatt nevezik ezen speciális matematikai programozási feladatot geometriai programozásnak.

Az alábbi tételben kimondott egyenlőtlenséget nevezzük *geometriai egyenlőtlenségnek*.

A geometriai egyenlőtlenség a súlyozott számtani-mértani közép egy általánosabb alakja. Erre az általánosabb formára a teljesség miatt bizonyítást is adunk.

Tétel: Ha α_i, β_i ($i = 1, 2, \dots, m$) tetszőleges nem-negatív számok, akkor

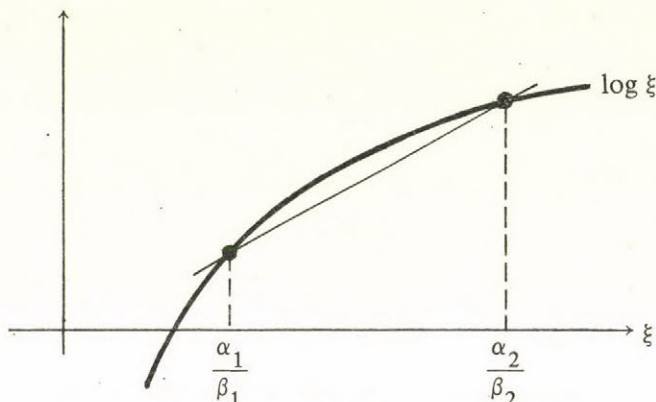
$$\left(\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i}{\sum_{i=1}^m \beta_i} \right)^{\sum_{i=1}^m \beta_i} \geq \prod_{i=1}^m \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} \right)^{\beta_i}$$

ahol $\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^0 = 1$, bármely α, β esetén.

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha_i \sum_{i=1}^m \beta_i = \beta_i \sum_{i=1}^m \alpha_i$, minden $i = 1, 2, \dots, m$ esetén.

Bizonyítás: Először az $m = 2$ esetre igazoljuk. Feltehetjük, hogy $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, mert ellenkező esetben az egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

A logaritmus függvény konkávitásából adódik, hogy



$$\log \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) \geq \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \log \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \log \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Ebből a logaritmus függvény monotonitása miatt azt kapjuk, hogy

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2} \geq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}}.$$

azaz

$$\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} \right)^{(\beta_1 + \beta_2)} \geq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^{\beta_1} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^{\beta_2}$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

tehát ha

$$\alpha_1 \beta_2 = \alpha_2 \beta_1.$$

Mindkét oldalhoz $\alpha_1 \beta_1$ illetve $\alpha_2 \beta_2$ értékeket hozzáadva kapjuk, hogy:

$$\alpha_1 (\beta_1 + \beta_2) = \beta_1 (\alpha_1 + \alpha_2),$$

és

$$\alpha_2 (\beta_1 + \beta_2) = \beta_2 (\alpha_1 + \alpha_2),$$

vagyis összefoglalva:

$$\alpha_i(\beta_1 + \beta_2) = \beta_i(\alpha_1 + \alpha_2), \quad (i = 1, 2).$$

Tegyük fel most, hogy $(m - 1)$ -re igaz az egyenlőtlenség, belátjuk, hogy akkor m -re is igaz.

Az indukciós feltevés és az $m = 2$ eset felhasználásával a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + (\alpha_{m-1} + \alpha_m)}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + (\beta_{m-1} + \beta_m)} \right)^{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + (\beta_{m-1} + \beta_m))} \geq \\ & \geq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^{\beta_2} \dots \left(\frac{\alpha_{m-2}}{\beta_{m-2}} \right)^{\beta_{m-2}} \cdot \left(\frac{\alpha_{m-1} + \alpha_m}{\beta_{m-1} + \beta_m} \right)^{(\beta_{m-1} + \beta_m)} \geq \\ & \geq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^{\beta_2} \dots \left(\frac{\alpha_{m-2}}{\beta_{m-2}} \right)^{\beta_{m-2}} \cdot \left(\frac{\alpha_{m-1}}{\beta_{m-1}} \right)^{\beta_{m-1}} \cdot \left(\frac{\alpha_m}{\beta_m} \right)^{\beta_m}. \end{aligned}$$

Az indukciós lépés, valamint az $m = 2$ eset vizsgálatából megállapíthatjuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha:

egyrészt az $m - 1$ -es indukciós feltevésből

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_i \sum_{i=1}^m \beta_i = \beta_i \sum_{i=1}^m \alpha_i & (i = 1, 2, \dots, m-2) \quad \text{és} \\ (\alpha_{m-1} + \alpha_m) \sum_{i=1}^m \beta_i = (\beta_{m-1} + \beta_m) \sum_{i=1}^m \alpha_i, \end{cases}$$

másrészt az $m = 2$ esetből

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_{m-1}(\beta_{m-1} + \beta_m) = \beta_{m-1}(\alpha_{m-1} + \alpha_m) \quad \text{és} \\ \alpha_m(\beta_{m-1} + \beta_m) = \beta_m(\alpha_{m-1} + \alpha_m). \end{cases}$$

Az (1) és (2) eseteket egybefoglalva; egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\alpha_i \sum_{i=1}^m \beta_i = \beta_i \sum_{i=1}^m \alpha_i \quad \text{minden } i = 1, 2, \dots, m \text{ esetben. } \blacksquare$$

2. §. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁSI FELADAT ÉS FŐ LEMMÁJA

Legyen az $A = (a_i) = (a^{(j)}) = (\alpha_{ij})$ $m \times n$ -es mátrix, valamint a $b = (\beta_j)$ n dimenziós vektor, a $c = (\gamma_i)$ pedig m dimenziós vektor. Legyen az $I = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ index halmaz az I_1, I_2, \dots, I_p diszjunkt index halmazokra particionálva. A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} \right\} I \quad \left. \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_p \end{array} \right\}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a^{(1)} \quad a^{(2)} \quad \quad \quad a^{(n)} \\
 \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \alpha_{1n} \\
 \hline
 \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot & \alpha_{2n} \\
 \hline
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \hline
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \hline
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \hline
 \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdot & \alpha_{mn} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 c \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \gamma_1 \\
 \hline
 \gamma_2 \\
 \hline
 \cdot \\
 \hline
 \cdot \\
 \hline
 \cdot \\
 \hline
 \gamma_m \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

$$b \quad \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 \beta_1 & \beta_2 & \cdot & \beta_n \\
 \hline
 \end{array}$$

Geometriai programozási feladatnak az alábbi matematikai programozási feladatot nevezzük:

PRIMÁL GEOMETRIAI PROGRAM: Meghatározandó azon $y = (\eta_j) \in R^{(n)}$ vektor, melyre

(1) $\quad \quad \quad$ by $\quad \quad$ maximális

feltéve, hogy

$$(2) \quad \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leq 1, \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

DUAL GEOMETRIAI PROGRAM: Meghatározandó azon $x = (\xi_i) \in R^{(m)}$ vektor, melyre

$$(3) \quad xc + \sum_{k=1}^p \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\gamma_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right) \sum_{i \in I_k} \xi_i} \quad \quad \quad \text{minimális,}$$

feltéve, hogy

$$(4) \quad \begin{cases} xA = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Azon $y \in R^{(n)}$ vektorok halmazát, melyek a (2) feltételt kielégítik, *primál feltételi halmaznak* nevezzük és \mathcal{P} szimbólummal jelöljük. Hasonlóan a (4) feltételt kielégítő $x \in R^{(m)}$ vektorok halmazát *duál feltételi halmaznak* nevezzük és \mathcal{D} -vel jelöljük. Azt mondjuk, hogy a program (primál, vagy duál) *konzisztens*, ha a feltételi halmaza nem üres.

A geometriai programozási primál feladat elég tág matematikai programozási feladat, például az $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2\}, \dots, I_p = \{m\}$ speciális esetben a lineáris programozási feladatot adja. Az alábbi megjegyzésekben a geometriai programozási feladat más, szokásos megadási formáit mutatjuk meg.

1. **Megjegyzés:** Tekintsük az alábbi *matematikai programozási* feladatot:

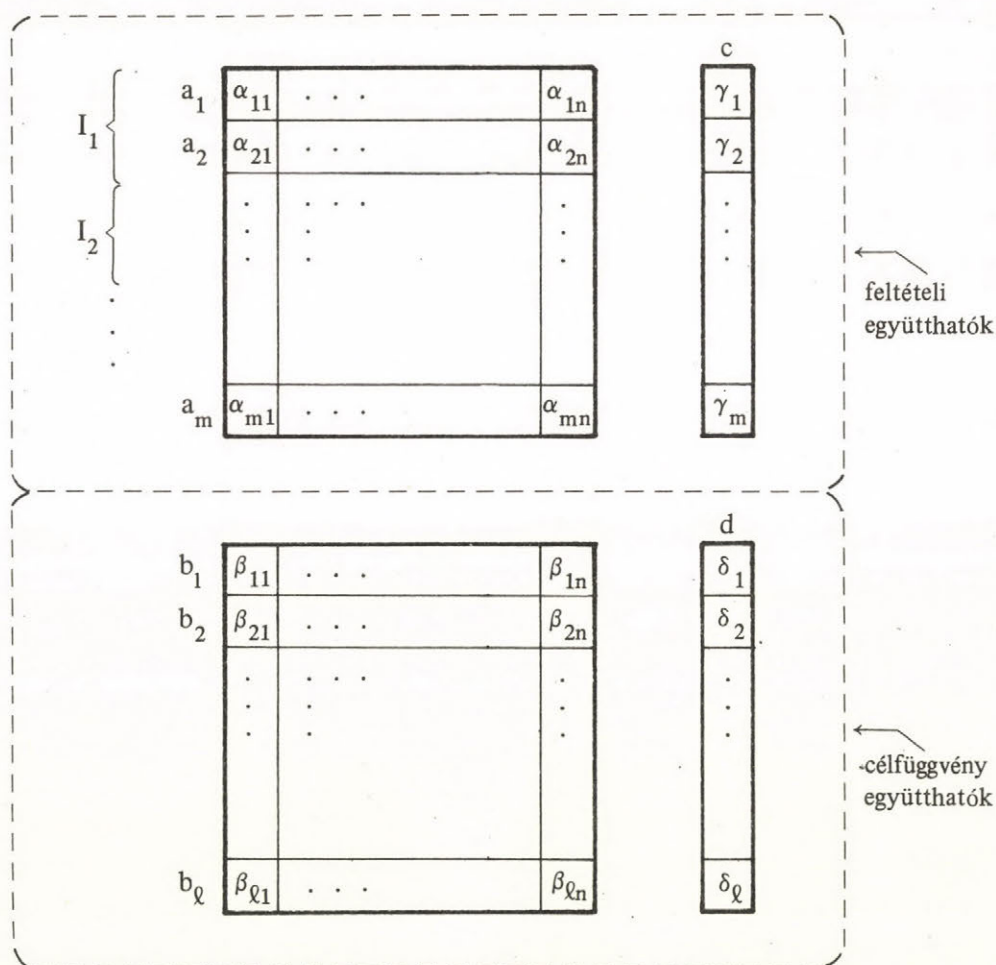
Meghatározandó azon $y \in R^{(n)}$ vektor, amelyre

$$\sum_{i=1}^{\ell} e^{b_i y - \delta_i} \quad \text{minimális,}$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leq 1, \quad (k = 1, \dots, p).$$

A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:



Általában ezt a feladatot tekintik *geometriai programozásnak*. Megmutatjuk, hogy ez a feladat egyszerűen visszavezethető a fent definiált PRIMÁL GEOMETRIAI PROGRAM-ra.

A feladat nyilvánvalóan ekvivalens a következővel: keresendő azon $(y, \omega) \in R^{(n+1)}$ vektor, melyre

$$e^{-\omega} \text{ minimális}$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leq 1, \quad (k = 1, \dots, p)$$

és

$$\sum_{i=1}^q e^{b_i y - \delta_i} \leq e^{-\omega}.$$

De ezt írhatjuk a következőképp is:

$$\left(\underbrace{1}_{\substack{1 \\ 0}}, \dots, \underbrace{n}_{\substack{0 \\ 1}} \right) \cdot (y, \omega) \quad \text{maximalizálendő}$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i \in I_k} e^{(a_i, 0)(y, \omega) - \gamma_i} \leq 1, \quad (k = 1, \dots, p),$$

és

$$\sum_{i=1}^q e^{(b_i, 1)(y, \omega) - \delta_i} \leq 1.$$

2. Megjegyzés: Az $e^{\eta_j} = \tau_j$, $e^{-\gamma_i} = \tilde{\gamma}_i$, $e^{-\delta_i} = \tilde{\delta}_i$ egy-egy értelmű transzformációval ($\eta_i = \ln \tau_i$, $\gamma_i = -\ln \tilde{\gamma}_i$, $\delta_i = -\ln \tilde{\delta}_i$) és most már a $\tau_i > 0$, $\tilde{\gamma}_i > 0$, $\tilde{\delta}_i > 0$ megkötéssel az 1. Megjegyzésnél adott modell a következő formát ölti:

a célfüggvény

$$(5) \quad \sum_{i=1}^q \tilde{\delta}_i \prod_{j=1}^n \tau_j^{\beta_{ij}},$$

a feltételi egyenlőtlenség

$$(6) \quad \sum_{i \in I_k} \tilde{\gamma}_i \prod_{j=1}^n \tau_j^{\alpha_{ij}} \leq 1, \quad (k = 1, \dots, p).$$

Az (5) és (6)-ban lévő függvényeket *pozinomnak* nevezzük. A geometriai programozás alkalmazásaiban a modell általában pozinomos formában van megfogalmazva.

A következő lemmában, a geometriai egyenlőtlenség alkalmazásával, egy alapvető összefü-

gést adunk a lehetséges megoldásokhoz tartozó célfüggvény értékekre. A lemma rávilágít a duál-feladat bevezetésének célszerűségére is. (Duffin-tól származik a "the main lemma of geometric programming" elnevezés).

Lemma: (a geometriai programozás fő lemmája):

Ha $y \in \mathcal{P}$ és $x \in \mathcal{D}$, akkor

$$(7) \quad by \leq xc + \sum_{k=1}^p \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}.$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(8) \quad e^{a_i y - \gamma_i} \sum_{i \in I_k} \xi_i = \xi_i, \text{ minden } i \in I_k \text{ indexre } (k = 1, \dots, p).$$

Bizonyítás: A (2) feltételi egyenlőtlenségre alkalmazva a geometriai egyenlőtlenséget a következőket kapjuk:

$$(9) \quad 1 \geq \left(\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i} \geq \prod_{i \in I_k} \left(\frac{e^{a_i y - \gamma_i}}{\xi_i} \right)^{\xi_i} \cdot \left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \cdot e^{\sum_{i \in I_k} \xi_i a_i y - \sum_{i \in I_k} \xi_i \gamma_i}.$$

Egyenlőség pedig akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(10) \quad \sum_{i \in I_k} \xi_i = 0 \quad \text{vagy} \quad \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = 1$$

és

$$(11) \quad e^{a_i y - \gamma_i} \sum_{i \in I_k} \xi_i = \xi_i \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i}.$$

A (10) és (11)-et egybefoglalva:

$$(12) \quad e^{a_i y - \gamma_i} \sum_{i \in I_k} \xi_i = \xi_i, \quad (i \in I_k).$$

A (9)-et $k = 1, \dots, p$ indexekre összeszorozva pedig a következőkhöz jutunk:

$$1 \geq \left(\prod_{k=1}^p \frac{(\sum_{i \in I_k} \xi_i)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\sum_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \right) \cdot e^{\sum_{i \in I} \xi_i a_i y - \sum_{i \in I} \xi_i \gamma_i} = \left(\prod_{k=1}^p \frac{(\sum_{i \in I_k} \xi_i)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \right) \cdot e^{xAy - xc}$$

Az $xA = b$ teljesülése miatt pedig

$$1 \geq \left(\prod_{k=1}^p \frac{(\sum_{i \in I_k} \xi_i)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \right) \cdot e^{by - xc}$$

Ebből logaritmizálás és rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$by \leq xc + \sum_{k=1}^p \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{(\sum_{i \in I_k} \xi_i)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}},$$

és ezzel a lemma első részét beláttuk, második része (12)-ből adódik. ■

Következmény: Legyenek $\bar{y} \in \mathcal{P}$, $\bar{x} \in \mathcal{D}$ és $\bar{x} > 0$ olyanok, hogy (7) egyenlőséggel teljesül. Akkor tetszőleges $x \in \mathcal{D}$ esetén:

$$(13) \quad b\bar{y} = xc + \sum_{k=1}^p \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \bar{\xi}_i^{\xi_i}}{(\sum_{i \in I_k} \bar{\xi}_i)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}.$$

Bizonyítás: Mivel \bar{y} , \bar{x} vektorokra (8) fennáll, így azt minden i -re a ξ_i hatványra emelve és összeszorozva kapjuk (13)-at. ■

3. §. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁSI FELADAT ALAPTULAJDONSÁGAI

Az alábbiakban a geometriai programozás néhány elemi tulajdonságát tárgyaljuk.

1. Lemma: $A \in \mathcal{P}$ primál feltételi halmaz konvex.

Bizonyítás: Legyen $y_1, y_2 \in \mathcal{P}$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in \mathcal{P}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$). Az exponenciális függvény konvexitása miatt

$$\lambda e^{a_i y_1} + (1 - \lambda)e^{a_i y_2} \geq e^{\lambda a_i y_1 + (1 - \lambda)a_i y_2}.$$

Megszorozva $e^{-\gamma_i}$ -vel és összegezve $i \in I_k$ -ra:

$$(1) \quad \sum_{i \in I_k} (\lambda e^{a_i y_1 - \gamma_i} + (1 - \lambda)e^{a_i y_2 - \gamma_i}) \geq \sum_{i \in I_k} e^{\lambda a_i y_1 + (1 - \lambda)a_i y_2 - \gamma_i}.$$

Mivel $y_1, y_2 \in \mathcal{P}$, ezért

$$(2) \quad \sum_{i \in I_k} (\lambda e^{a_i y_1 - \gamma_i} + (1 - \lambda) e^{a_i y_2 - \gamma_i}) \leq 1.$$

Az (1) és (2) összevetéséből

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) - \gamma_i} \leq 1,$$

azaz $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in \mathcal{P}$. ■

2. Lemma: *A duál feladat*

$$\varphi(x) = xc + \sum_{k=1}^p \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{(\sum_{i \in I_k} \xi_i)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}, \quad (x \geq 0)$$

célfüggvényére fennáll

- a) $\varphi(0) = 0$,
- b) $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$, ha $\lambda \geq 0$,
- c) $\varphi(x + \bar{x}) \leq \varphi(x) + \varphi(\bar{x})$,

azaz pozitív-homogén konvex függvény.

Bizonyítás: Az a) rész triviális. A b) rész egyszerű számolással adódik:

$$\ln \frac{\prod (\lambda \xi_i)^{\lambda \xi_i}}{(\sum (\lambda \xi_i))^{\sum \lambda \xi_i}} = \ln \frac{\prod \lambda^{\lambda \xi_i} \cdot \prod \xi_i^{\lambda \xi_i}}{(\lambda \sum \xi_i)^{\lambda \sum \xi_i}} = \ln \frac{\lambda^{\lambda \sum \xi_i} (\prod \xi_i^{\xi_i})^{\lambda}}{\lambda^{\lambda \sum \xi_i} ((\sum \xi_i)^{\sum \xi_i})^{\lambda}} = \lambda \ln \frac{\prod \xi_i^{\xi_i}}{(\sum \xi_i)^{\sum \xi_i}}.$$

A c) rész belátásához azt kell megmutatni, hogy

$$\ln \frac{\prod (\xi_i + \bar{\xi}_i)^{\xi_i + \bar{\xi}_i}}{(\sum (\xi_i + \bar{\xi}_i))^{\sum (\xi_i + \bar{\xi}_i)}} \leq \ln \frac{\prod \xi_i^{\xi_i}}{(\sum \xi_i)^{\sum \xi_i}} + \ln \frac{\prod \bar{\xi}_i^{\bar{\xi}_i}}{(\sum \bar{\xi}_i)^{\sum \bar{\xi}_i}},$$

vagy a logaritmus függvény monotonitása miatt azt, hogy

$$(3) \quad \frac{\prod (\xi_i + \bar{\xi}_i)^{\xi_i + \bar{\xi}_i}}{(\sum (\xi_i + \bar{\xi}_i))^{\sum (\xi_i + \bar{\xi}_i)}} \leq \frac{\prod \xi_i^{\xi_i} \cdot \prod \bar{\xi}_i^{\bar{\xi}_i}}{(\sum \xi_i)^{\sum \xi_i} \cdot (\sum \bar{\xi}_i)^{\sum \bar{\xi}_i}}.$$

Alkalmazzuk a geometriai egyenlőtlenséget

$$\alpha_i = \xi_i + \bar{\xi}_i \quad \text{és} \quad \beta_i = \xi_i$$

megválasztásával, ekkor azt kapjuk, hogy

$$(4) \quad \left(\frac{\sum (\xi_i + \bar{\xi}_i)}{\sum \xi_i} \right)^{\sum \xi_i} \geq \prod \left(\frac{\xi_i + \bar{\xi}_i}{\xi_i} \right)^{\xi_i},$$

majd pedig az

$$\alpha_i = \xi_i + \bar{\xi}_i \quad \text{és} \quad \beta_i = \bar{\xi}_i$$

választásokkal a következőhöz jutunk:

$$(5) \quad \left(\frac{\sum (\xi_i + \bar{\xi}_i)}{\sum \bar{\xi}_i} \right)^{\sum \bar{\xi}_i} \geq \prod \left(\frac{\xi_i + \bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_i} \right)^{\bar{\xi}_i}.$$

A (4) és (5) összeszorzásából végül is kapjuk a (3) egyenlőtlenséget. ■

3. Lemma: a) Ha $y \in \mathcal{P}$ és valamely \bar{y} vektorra $A\bar{y} \leq 0$, akkor tetszőleges $\vartheta \geq 0$ számra $(y + \vartheta \bar{y}) \in \mathcal{P}$.

b) Ha $y \in \mathcal{P}$, akkor $Ay \leq c$.

Bizonyítás: a) Mivel $e^{a_i \bar{y}} \leq 1$, ezért

$$1 \geq \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \geq \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \cdot e^{\vartheta a_i \bar{y}} = \sum e^{a_i (y + \vartheta \bar{y}) - \gamma_i},$$

tehát $(y + \vartheta \bar{y}) \in \mathcal{P}$.

b) A feltételei egyenlőtlenségekből:

$$1 \geq \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \geq e^{a_i y - \gamma_i}$$

és így

$$a_i y - \gamma_i \leq 0 \quad \text{minden } i \in I\text{-re.} \quad \blacksquare$$

A 3. lemmából azonnal adódnak az alábbi következmények:

1. Következmény: a) Ha a \mathcal{P} halmaz nem üres, akkor korlátosságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy az A matrix sorvektorai által generált kúp kiadja az egész $R^{(n)}$ teret.

b) Ha a \mathcal{P} nem üres halmaz korlátos, akkor $xA = 0$ egyenletnek van $x > 0$ megoldása.

c) Ha \mathcal{P} nem üres, korlátos halmaz és \mathcal{Q} nem üres halmaz, akkor \mathcal{D} nem korlátos.

Bizonyítás: a) A 3. lemmából nyilvánvaló, hogy a nem üres \mathcal{P} feltételi halmaz korlátosságára szükséges és elégséges feltétel az, hogy az $Ay \leq 0$ egyenlőtlenségnek ne legyen az $y \equiv 0$ triviális megoldástól különböző megoldása. Jelöljük \mathcal{C}_A -val, az A mátrix sorvektorai által kifeszített kúpot, akkor \mathcal{C}_A^* duális kúp adja az $Ay \leq 0$ egyenlőtlenség megoldásainak összességét. De \mathcal{C}_A^* akkor és csak akkor a zérus elem, ha \mathcal{C}_A az egész tér.

b) Az a) miatt \mathcal{C}_A az egész tér, és így léteznek olyan $\bar{\xi}_i \geq 0$ skalárok, hogy

$$-(a_1 + a_2 + \dots + a_m) = \sum_{i=1}^m \bar{\xi}_i a_i.$$

Ebből pedig átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^m (1 + \bar{\xi}_i) a_i = 0,$$

tehát a $\xi_i = 1 + \bar{\xi}_i$ megoldás kielégíti b)-t.

c) A b)-ből nyilvánvaló. ■

A lemmából levonható további következményekhez szükségünk van az alábbi fogalomra:

Definíció: \mathcal{P}_ω felsőnívóhalmaznak nevezzük a \mathcal{P} halmaz azon részhalmazát, ahol $by \geq \omega$.

2. Következmény: a) A nem üres \mathcal{P}_ω halmaz korlátosságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy az A mátrix sorvektorai és a $-b$ vektor által generált kúp kiadja az egész $R^{(n)}$ teret.

b) Ha \mathcal{P}_ω korlátos, akkor az $xA = b$ egyenletnek van $x > 0$ megoldása.

Bizonyítás: A \mathcal{P}_ω felsőnívóhalmaz a

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leq 1, \quad (k = 1, \dots, p)$$

$$e^{-by + \omega} \leq 1,$$

feltételi halmaz. Erre alkalmazzuk az 1. következményt. ■

4. §. A PRIMÁL CÉLFÜGGVÉNY KORLÁTOSSÁGÁNAK SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES FELTÉTELE

Az alábbi tétel, amely a primálfüggvény szuprémumának végeességére ad szükséges és elégséges feltételt, fontos szerepet játszik a geometriai programozás dualitási tételénél.

Tétel: A konzisztens primál feladat célfüggvénye akkor és csak akkor korlátos felülről, ha a duál feladat konzisztens.

Bizonyítás: Ha a duál feladat konzisztens, akkor van olyan $\bar{x} \geq 0$, hogy

$$(1) \quad \bar{x}A = b.$$

A 3. lemma b) szerint bármely $y \in \mathcal{P}$ esetén

$$(2) \quad Ay \leq c.$$

Megszorozva a (2) egyenlőtlenséget \bar{x} -vel, és felhasználva (1)-et kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \bar{x} Ay &\leq \bar{x}c, \\ by &\leq \bar{x}c \quad \text{minden } y \in \mathcal{P} \text{ esetén,} \end{aligned}$$

tehát by felülről korlátos.

Fordítva, ha a duál feladatnak nincs lehetséges megoldása, akkor a Farkas-lemma szerint van olyan \bar{y} , hogy

$$\begin{aligned} A\bar{y} &\leq 0, \\ b\bar{y} &> 0. \end{aligned}$$

Ha $y \in \mathcal{P}$, akkor 3. lemma a) miatt $y + \vartheta \bar{y} \in \mathcal{P}$, ($\vartheta \geq 0$). De ezen lehetséges megoldásra a célfüggvény értéke:

$$b(y + \vartheta \bar{y}) = by + \vartheta b\bar{y} \rightarrow \infty, \quad \text{ha } \vartheta \rightarrow \infty. \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy a tétel egyik iránya – "ha a duál konzisztens, akkor a primál célfüggvény felülről korlátos" – a geometriai programozás fő lemmájából is nyilvánvaló.

A tételből a 3. fej. 1. a) következményének egy élesítését nyerhetjük, amely a geometriai programozás pozitív formájában lehet érdekes.

1. Következmény: a) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $y \in \mathcal{P}$ minden koordinátájában felülről korlátos legyen az, hogy az A mátrix sorvektorai által generált kúp a pozitív ortánszt tartalmazza (pozitív formában y felső korlátossága azt jelenti, hogy $t = (\tau_j)$ lehetséges vektorok halmaza korlátos).

b) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $y \in \mathcal{P}$ minden koordinátájában alulról korlátos legyen az, hogy az A mátrix sorvektorai által generált kúp a negatív ortánszt tartalmazza (pozitív formában ez azt jelenti, hogy t lehetséges vektorok halmaza zárt).

Bizonyítás: a) Az $y \in \mathcal{P}$ vektor η_j koordinátájában akkor és csak akkor korlátos felülről, ha a megoldáshalmazon az $u_j y$ célfüggvény korlátos, azaz a tétel szerint van megoldása az $xA = u_j$, $x \geq 0$ rendszernek. ($u_j = (0, 0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0)$)

b) A bizonyítás analóg az a) résszel, $-u_j y$ célfüggvénnyel. \blacksquare

Az alábbi következmény a \mathcal{P} és \mathcal{Q} halmazok közt ad egy kapcsolatot.

2. Következmény: a) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a nem üres \mathcal{P} halmazon az $e^{a_i y - \gamma_i}$ tag, mint célfüggvény zérustól el legyen választva az, hogy az $x A = 0$, $x \geq 0$ egyenletnek legyen $\xi_i > 0$ megoldása.

(A "zérustól való elválasztás" azt jelenti, hogy van olyan $\epsilon > 0$, hogy $e^{a_i y - \gamma_i} \geq \epsilon$, ha $y \in \mathcal{P}$.)

b) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy valamely nem üres \mathcal{P}_ω nívóhalmazon az $e^{a_i y - \gamma_i}$ tag zérustól el legyen választva az, hogy az $x A - \vartheta b = 0$, $x \geq 0$, $\vartheta \geq 0$ rendszernek legyen $\xi_i > 0$ megoldása.

Bizonyítás: a) Az $e^{a_i y - \gamma_i}$ akkor és csak akkor van zérustól elválasztva, ha $-a_i y$ felülről korlátos, de a tétel szerint ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy legyen megoldása az $x A = -a_i$, $x \geq 0$ rendszernek, ez azonban ekvivalens azzal, hogy legyen $\xi_i > 0$ megoldása $x A = 0$, $x \geq 0$ rendszernek.

b) Az a) rész alkalmazása a \mathcal{P}_ω felsőnívóhalmazra. ■

5. §. KANONIKUS FELADAT.

A *kanonikus geometriai programozási* feladat a geometriai programozás elméletében, a megoldó algoritmusokban és számos alkalmazásnál döntő szerepet játszik.

Definíció: *Kanonikusnak* nevezzük a geometriai programozási feladatpárt, ha a duálfeladatnak van minden koordinátájában pozitív lehetséges megoldása.

Az alábbi lemma, amely a konvex függvényekre vonatkozó Farkas-tétel* egy adaptációja, alapvető a kanonikus feladat tárgyalásában.

Lemma: Ha $x A = 0$ egyenletnek van $x > 0$ megoldása, és minden $x \geq 0$ megoldásra

$$x c + \sum_{k=1}^p \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}} \geq 0,$$

akkor van olyan \bar{y} , hogy

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i \bar{y} - \gamma_i} \leq 1, \quad (k = 1, \dots, p).$$

Bizonyítás: A Farkas-tétel szerint a feltétel fennállása esetén léteznek olyan $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n$

*Lásd pl. Stoer-Witzgall [42]

számok, hogy

$$(1) \quad xc + \sum_{k=1}^p \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)} \geq \sum_{j=1}^n x a^{(j)} \bar{\eta}_j, \quad \text{minden } x \geq 0 \text{ esetén.}$$

Rögzítsünk egy k_0 indexet. Legyen ezen rögzített index mellett:

$$\xi_i^* = \begin{cases} e^{a_i \bar{y} - \gamma_i}, & \text{ha } i \in I_{k_0} \\ 0, & \text{ha } i \notin I_{k_0}. \end{cases}$$

A ξ_i^* értékét, az $i \notin I_{k_0}$ esetben, (1)-be helyettesítve:

$$\sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i^* (a_i \bar{y} - \gamma_i) \leq \sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i^* \ln \xi_i^* - \ln \left(\sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i^* \right)^{\sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i^*}$$

Behelyettesítve ξ_i^* értékét $i \in I_{k_0}$ esetre is:

$$\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i \bar{y} - \gamma_i} (a_i \bar{y} - \gamma_i) \leq \sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i \bar{y} - \gamma_i} (a_i \bar{y} - \gamma_i) - \ln \left(\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i \bar{y} - \gamma_i} \right)^{\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i \bar{y} - \gamma_i}}$$

Ebből

$$\ln \left(\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i \bar{y} - \gamma_i} \right)^{\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i \bar{y} - \gamma_i}} \leq 0,$$

azaz

$$\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_i \bar{y} - \gamma_i} \leq 1, \quad \text{tetszőleges } k_0\text{-ra.} \blacksquare$$

Tétel: Ha a kanonikus geometriai programozási duálfeladat célfüggvénye alulról korlátos, akkor a primál feladat konzisztens és a célfüggvény felveszi maximumát a feltételi halmaz valamely \bar{y} pontjában és

$$b\bar{y} = \inf_{x \in \mathcal{D}} \left\{ xc + \sum_{k=1}^p \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)} \right\},$$

Bizonyítás: Jelölje $\varphi(x)$ a duálfeladat célfüggvényét, azaz

$$\varphi(x) = xc + \sum_{k=1}^p \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)},$$

legyen továbbá

$$\mu = \inf_{x \in \mathcal{D}} \varphi(x).$$

Az előző lemmát az alábbi

$$(2) \quad xA + \xi_0(-b) = 0, \quad x \geq 0, \quad \xi_0 \geq 0,$$

feltételi egyenletre és a

$$(3) \quad \tilde{\varphi}(x, \xi_0) = xc + \sum_{k=1}^p \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right) \sum_{i \in I_k} \xi_i} + \xi_0(-\mu)$$

függvényre alkalmazzuk.

A lemma alkalmazható, mert a (2) egyenletnek van $x > 0$, $\xi_0 > 0$ megoldása, és a (3) függvény a (2) feltételnek eleget tevő helyen nem-negatív. Ha ugyanis negatív lenne, azaz

$$(4) \quad \tilde{\varphi}(\bar{x}, \bar{\xi}_0) < 0,$$

akkor a következő két eset fordulna elő:

a) Ha $\bar{\xi}_0 = 0$. Akkor $\bar{x}A = 0$, és ha $x \in \mathcal{D}$, akkor $x + \vartheta \bar{x} \in \mathcal{D}$, bármely $\vartheta \geq 0$ esetén. Ezen megoldáshoz tartozó célfüggvényre, felhasználva 3.§. 2 lemmát:

$$\varphi(x + \vartheta \bar{x}) \leq \varphi(x) + \vartheta \varphi(\bar{x}) = \varphi(x) + \vartheta \tilde{\varphi}(\bar{x}, 0) \rightarrow -\infty,$$

ellentétben azzal, hogy φ alulról korlátos.

b) Ha $\bar{\xi}_0 > 0$. Legyen ekkor $\xi_i = \frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_0}$, ($i = 1, \dots, m$). A (2) és (3)-ból az így definiált x -re

$$xA = b,$$

és

$$\varphi(x) < \mu,$$

amely ellentétes μ definíciójával.

Mivel a lemma feltételei teljesülnek, ezért létezik olyan \bar{y} , hogy

$$(5) \quad \sum_{i \in I_k} e^{a_i \bar{y} - \gamma_i} \leq 1, \quad (k = 1, \dots, p)$$

és

$$(6) \quad e^{-b\bar{y} + \mu} \leq 1.$$

Az (5) egyenlőtlenség azt mutatja, hogy $\bar{y} \in \mathcal{P}$. A (6) egyenlőtlenségből pedig azt kapjuk, hogy

$$(7) \quad \mu \leq b\bar{y}.$$

Összevetve ezt a geometriai programozás fő lemmájával, végül is

$$\mu = b\bar{y},$$

amit bizonyítani akartunk. ■

Következmény: Ha a kanonikus geometriai programozási primál feladat konzisztens, akkor a célfüggvény felveszi maximumát a primál feltételi halmaz valamely \bar{y} pontjában.

Bizonyítás: Ha a primál feladat konzisztens, akkor a főlemma szerint a duál célfüggvény korlátos, és így a tételből adódik a következmény állítása. ■

Megjegyzés: A geometriai programozás fő lemmájából adódik, hogy a duálcélfüggvény alsó korlátosságára elégséges feltétel, hogy a primál feladat konzisztens legyen. Könnyen látható, hogy az nem szükséges feltétel. Azonban a fenti tételt figyelembevéve, a kanonikus feladatra a 4. §. tételéhez hasonló tételhez jutunk: *a kanonikus duál feladat célfüggvénye akkor és csak akkor korlátos alulról, ha a primál feladat konzisztens.*

6. §. REDUKÁLT FELADAT.

Legyen a geometriai programozási feladat olyan, hogy a \mathcal{D} duál feltételi halmaz nem üres. Jelöljük I^* -al azon $i \in I$ indexek halmazát, melyre van olyan $x \geq 0$ lehetséges megoldása $xA = b$ feltételi halmaznak, hogy $\xi_i > 0$. A geometriai programozási feladatot *redukáljuk* úgy, hogy csak az $i \in I^*$ tagokat hagyjuk meg. A redukált feladat kanonikus feladat. Nyilvánvaló, hogy a duál feladat és a redukált duál feladat közt teljes equivalencia van. Azaz a redukált duál feladat egy lehetséges megoldása zérusokkal kiegészítve az eredeti lehetséges megoldása és fordítva is az eredeti egy lehetséges megoldása a redukciónak megfelelő zérus koordináták elhagyásával a redukált egy megoldása és a célfüggvények értékei megegyeznek. Látni fogjuk, hogy a primál és a redukált primál feladat közt is fennáll egy "gyengébb equivalencia", nevezetesen az, hogy ha y^* a redukált egy lehetséges megoldása, akkor van olyan y lehetséges megoldása az eredeti primálnak, melyre a két célfüggvényérték tetszőleges kicsit tér el egymástól. Mielőtt ezt tételben pontosan kimondanánk, egy lemmát bizonyítunk, amely voltaképpen a Farkas-lemmának rendszerre való általánosítása, és a Tucker-féle komplementaritási tételek egyike. A teljesség kedvéért ezt itt a Farkas-lemma felhasználásával be is bizonyítjuk.

Tekintsük az

$$(1) \quad \begin{cases} xA = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer.

Legyen I_+ : azon i indexek halmaza, melyre van olyan $x \geq 0$, hogy $xA = 0$ és $\xi_i > 0$.

I_- : azon i indexek halmaza, melyre van olyan y , hogy $Ay \leq 0$ és $a_i y < 0$.

Lemma: A fent definiált I_+ és I_- index halmazokra:

a) $I_+ \cap I_- = \emptyset$,

b) $I_+ \cup I_- = I$.

Bizonyítás: Az (1) y -al való szorzásából adódó

$$0 = xAy = \sum_{i=1}^m \xi_i a_i y$$

összefüggésből a) rész nyilvánvaló.

A b) rész igazolásához tegyük fel, hogy $i_0 \notin I_+$, ez azt jelenti, hogy a

$$-a_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \xi_i a_i$$

egyenletnek nincs $x \geq 0$ megoldása. De akkor a Farkas-lemma szerint van olyan y , hogy

$$a_i y \leq 0, \quad i \neq i_0,$$

$$-a_{i_0} y > 0,$$

azaz $Ay \leq 0$ és $a_{i_0} y < 0$, tehát $i_0 \in I_-$. ■

Következmény: Ha I^* az i indexek azon legbővebb halmaza, melyre $xA = b$, $x \geq 0$ feltételi halmaznak van $\xi_i > 0$ megoldása, akkor van olyan \bar{y} , hogy

$$(2) \quad \begin{cases} b\bar{y} = 0, \\ a_i \bar{y} = 0, \quad \text{ha } i \in I^*, \\ a_i \bar{y} < 0, \quad \text{ha } i \notin I^*. \end{cases}$$

Bizonyítás: A lemmából, az $xA + \xi_0(-b) = 0$ egyenletre alkalmazva, nyilvánvaló. ■

Tétel. Legyen a geometriai programozási feladat olyan, hogy \mathcal{P} és \mathcal{D} feltételi halmazok nem üresek. Jelölje \mathcal{P}^* a redukált primál feladat feltételi halmazát, ekkor bármely $y^* \in \mathcal{P}^*$ és tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén létezik olyan $y \in \mathcal{P}$, hogy $|by - by^*| \leq \epsilon$.

Bizonyítás: Legyen y_0 a feltevés szerint nem üres \mathcal{P} halmaz egy rögzített eleme, az y^* pedig \mathcal{P}^* rögzített eleme. Ha $y_0 \equiv y^*$, vagy $b \equiv 0$, akkor készen vagyunk. Egyébként válasszuk δ számot a következőképp:

$$0 < \delta \leq \max \left(\frac{\epsilon}{\|b\| \cdot \|y_0 - y^*\|}, 1 \right).$$

Legyen

$$y = \delta y_0 + (1 - \delta)y^* + \vartheta \bar{y},$$

ahol \bar{y} a következmény (2) szerint biztosított, rögzített vektor, a δ számot pedig később fogjuk alkalmasan megválasztani, úgy, hogy $y \in \mathcal{P}$ legyen. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |by - by^*| &= |b(\delta y_0 + (1 - \delta)y^* + \vartheta \bar{y} - y^*)| = \\ &= |b(y_0 - y^*)|\delta \leq \delta \|b\| \cdot \|y_0 - y^*\| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Meg kell még mutatni, hogy δ választásával elérhető, hogy $y \in \mathcal{P}$ teljesül. Vizsgáljuk a k -adik feltételt:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} &= \sum_{i \in I_k \cap I^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1 - \delta)y^*) - \gamma_i} + \\ &+ \sum_{i \in I_k \cap \bar{I}^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1 - \delta)y^*) - \gamma_i} \cdot e^{\vartheta a_i \bar{y}}. \end{aligned}$$

Három eset lehetséges:

a) Ha $I_k \cap \bar{I}^* = \emptyset$, akkor

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = \sum_{i \in I_k \cap I^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1 - \delta)y^*) - \gamma_i} \leq 1,$$

ugyanis $y_0 \in \mathcal{P}^*$ és \mathcal{P}^* konvexitása miatt $(\delta y_0 + (1 - \delta)y^*) \in \mathcal{P}^*$.

b) Ha $I_k \cap I^* = \emptyset$, akkor

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = \sum_{i \in I_k \cap \bar{I}^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1 - \delta)y^*) - \gamma_i} \cdot e^{\vartheta a_i \bar{y}} \leq 1,$$

ugyanis $a_i \bar{y} < 0$ miatt ϑ elég nagyra választásával elérhető.

c) Ha $I_k \cap \bar{I}^* \neq \emptyset$ és $I_k \cap I^* \neq \emptyset$, akkor

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = \sum_{i \in I_k \cap I^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)y^*) - \gamma_i} + \\ + \sum_{i \in I_k \cap \bar{I}^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)y^*) - \gamma_i} e^{\vartheta a_i \bar{y}} \leq 1.$$

ugyanis, mivel $I_k \cap \bar{I}^* \neq \emptyset$, ezért $\sum_{i \in I_k \cap I^*} e^{a_i y_0 - \gamma_i} < 1$, és $\delta > 0$ miatt

$$\sum_{i \in I_k \cap I^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)y^*) - \gamma_i} < 1,$$

Igy $a_i \bar{y} < 0$ miatt ϑ elég nagyra választásával elérhető. ■

A tételből azonnal adódik a következő fontos állítás:

Következmény:

$$\sup_{a \in \mathcal{P}} by = \sup_{y \in \mathcal{P}^*} by.$$

Bizonyítás: Mivel $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^*$, ezért

$$\sup_{y \in \mathcal{P}} by \leq \sup_{y \in \mathcal{P}^*} by,$$

de egyenlőtlenség a tétel alapján nem állhat fenn. ■

7. §. DUALITÁSI TÉTEL

Az eddigi vizsgálatokból egyszerűen nyerhető a geometriai programozás dualitási tétele.

Tétel: a) Ha a primál- és a duálfeladat-konzisztens, akkor a primál célfüggvény szuprénuma megegyezik a duál célfüggvény infimumával.

b) Ha a primál feladat konzisztens és véges szuprénuma van, akkor a duál is konzisztens és a primál szuprénum a duál infimummal megegyezik.

Bizonyítás: a) A geometriai programozás fő lemmájából, a kanonikus feladat és a redukált feladat alaptételéből azonnal adódik.

b) A primál célfüggvény korlátosságának szükséges és elégséges feltételéből, valamint az a) részből adódik. ■

Megjegyzés: Abból, hogy a duálfeladat konzisztens és véges infimuma van, nem következik még a primál feladat konzisztenciája. Azonban a redukált feladat alaptételét és annak bizonyítását, valamint a kanonikus feladat alaptételét figyelembevéve egy gyengébb, úgynevezett szubkonzisztenciát tudunk biztosítani:

Ha a duálfeladat konzisztens és a célfüggvényének véges μ infinuma van, akkor tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén a módosított

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leq 1 + \epsilon, \quad (k = 1, \dots, p)$$

feladat konzisztens és

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{y \in \mathcal{P}_\epsilon} b y = \mu.$$

A geometriai programozás dualitás tétele nemcsak elméleti szempontból jelentős, hanem a primál-duál feladatpárt megoldó iteratív eljárás esetén tájékoztatást ad az iteráció pontosságáról.

IRODALOM

A keverék kémiai egyensúly egyenletét, egy matematikai programozási feladatként, formulázta meg White – S.M. Johnson – Dantzig [44]. Ez a modell lényegében a geometriai programozási duál feladat, ahol a célfüggvény a keverék szabad energiája (Gibbs [22]).

Ezt követően Dantzig – White – S.M. Johnson [11] dolgozatukban a célfüggvényt szakaszonkénti lineáris függvénnyel közelítve egy megoldási algoritmust javasolnak a feladatra. A kémiai egyensúly duálfeladatát, a tulajdonképpeni geometriai programozási primál feladatot adja Clasen [7], s egyúttal egy numerikus megoldási algoritmust javasol a kémiai egyensúly megoldására. A geometriai programozás duál feladatát, mint a kémiai egyensúly matematikai modelljét tárgyalja Shapiro [39], Shapiro – Shapley [40, 41] s úgyszintén ez a feladat a kiinduló probléma Dantzig – Folkman – Shapiro [10] dolgozatának is.

A másik oldalról, – egyenlőtlenségek (geometriai egyenlőtlenség) felhasználása matematikai programozási feladatokban – R.C. Johnson [25], Fein [19], Zener [48], Charnes – Cooper [8] Duffin [13], Sherwood [43] munkáiban található. Ezt a gondolatot fejlesztette tovább Zener [49, 50, 51] Duffin [12] Duffin – Peterson [16], Duffin – Zener [18].

1966-ban megjelent az addigi eredmények összefoglalása Duffin – Peterson – Zener [17] könyve. A könyv tárgyalja a geometriai programozást és dualitási problémakörét, a geometriai programozás alkalmazását, és a geometriai programozás kiterjesztését. A könyvet követően jelent meg Duffin – Peterson [15] dolgozata, amely a geometriai programozás dualitási tételére, a könyvben szereplő tárgyalásnál egyszerűbb bizonyítást ad. Duffin [14] dolgozatában újra visszatér a dualitási tételnek egy más, a lineáris programozás dualitás-tételét felhasználó bizonyítására. Avriel – Williams [5] dolgozatában a primál-duál feltételi halmazokkal kapcsolatos vizsgálatokat végez. Ez a dolgozat adta számomra a gondolatot, hogy a dualitási tételhez, a duálfeladat irányából a Farkas-tétel felhasználásával közelítsek. Ily módon a dualitási problémakör egy-

szerűbben tárgyalható. A geometriai programozás számos alkalmazását mutatja be Duffin – Peterson – Zener [17] könyve. További alkalmazások találhatók Wilde [45] és Wilde – Beightler [46] munkáiban, a [17] könyvet követően újabb műszaki alkalmazásokat Avriel – Wilde [1, 3], és a gazdasági alkalmazást Gale [21] dolgozatai ismertetnek.

Az utóbbi időszak geometriai programozás kutatási eredményeit három főbb csoportba foglalhatjuk össze (a., b., c.).

a) ”Előjeles geometriai programozás” vagy ”általánosított polinom programozás” vizsgálatával foglalkoznak Avriel – Williams [4], Blau – Wilde [6] és Passy – Wilde [31, 32] dolgozatai.

a) A ”kiterjesztett geometriai programozás” alapgondolata az, hogy a matematikai programozásban a súlyozott számtani-mértani közép mintájára a súlyozott Hölder-egyenlőtlenséget (lásd. pl. [23]) használja. Ezzel a modellel Duffin – Peterson – Zener könyve is foglalkozik, azonban részletesebb kidolgozása Peterson – Ecker [34, 35, 36, 37, 38], Peterson [33] és Passy [30] munkáiban található.

c) A ”Sztocasztikus geometriai programozás”-nak mintegy előzetese Mangasarian – Rosan [28] és Lieu [27] munkássága. A sztochasztikus geometriai programozás feladatával Avriel – Wilde [2] foglalkozik.

A matematikai programozás más területén elért eredményeket hasznosítja a geometriai programozásban Klinger – Mangasarian [26] és Pascual – Ben Israel [29].

Egy speciális geometriai programozási feladatot old meg a játékelmélet nyeregponttételével Danskin [9], és úgyszintén egy másik speciális típusút a dinamikus programozás eszközével Hisashi Mine – Katsuhisa Ohno [24].

I r o d a l o m j e g y z é k

- [1] M. Avriel and D.J. Wilde, Optimal Condenser Design by Geometric Programming, I & EC Process Design and Development, 6 (1967), 256-263.
- [2] M. Avriel and D.J. Wilde, Stochastic Geometric Programming, (Előadás: International Symposium on Mathematical Programming-on) Princeton, N.J., 1967, August.
- [3] M. Avriel and D.J. Wilde, Fundamentals of geometric programming, (in Applications of Mathematical Programming Techniques (E.M.L. Beale ed.), American Elsevier, New York, (1970), 295-316.
- [4] M. Avriel and A. C. Williams, Complementary Geometric Programming, SIAM J. Appl. Math. Vol. 19. No. 1. (July 1970), 127-141.
- [5] M. Avriel and A.C. Williams, On the Primal and Dual Constraint Sets in Geometric Programming, Journal of Math. Anal. and Appl., 32 (1970), 684-688.
- [6] G.E. Blau and D.J. Wilde, Second order characterization of generalized polynomial programs, (Előadás: International Symposium on Mathematical Programming-on) Princeton, New Jersey, 1967.
- [7] R.J. Clasen, The Linear-Logarithmic Programming Problem, RAND Corp. Memo RM-3707-PR, (June 1963).
- [8] A. Charnes and W. Cooper, Optimizing engineering designs under inequality constraints, ONR Research Memorandum 64, Northwestern University Evanston, Illinois, 1962.
- [9] J.M. Danskin, The theory of max-min with applications, SIAM J. Vol. 14 (1966), 641-664.
- [10] G.B. Dantzig, J. Folkman and N. Shapiro, On the continuity of the minimum set of a continuous function, J. Math. Anal. Appl., 17 (1967), 519-548.
- [11] G.B. Dantzig, S. Johnson and W. White, A Linear Programming Approach to the Chemical Equilibrium Problem, Management Sci., 5 (1958), 38-43.
- [12] R.J. Duffin, Dual programs and minimum cost, Operations Res., 10 (1962), 119-123.
- [13] R.J. Duffin, Cost minimalization problems treated by geometric means, Operations Res., 10 (1962), 668-675.
- [14] R.J. Duffin, Linearizing Geometric Programs, SIAM Review, Vol. 12. No. 2. (April 1970).
- [15] R.J. Duffin and E.L. Peterson, Duality theory for geometric programming, SIAM J. Appl. Math., 14 (1966), 1307-1349.
- [16] R.J. Duffin and E.L. Peterson, Constrained minima treated by geometric means, Westinghouse Scientific Paper, 64-158-129-P3, (1964).
- [17] R.J. Duffin, E.L. Peterson and C. Zener, Geometric Programming, John Wiley, New York, 1966.
- [18] R.J. Duffin and C. Zener, Optimization of engineering problems, Westinghouse Engineer, 24 (1964), 154.
- [19] A.E. Fein, A mathematical Aid in Optimizing Engineering Designs, II. Proc. Nat. Acad. Sci., 47 (1961).

- [20] D. Gale, Theory of linear economic models, New York, McGraw-Hill, 1960.
- [21] D. Gale, A geometric duality theorem with economic applications, Rev. Economic Studies, 34 (1967), 19-24.
- [22] J.W. Gibbs, On the Equilibrium of Heterogeneous Substances, The Scientific Papers of J. Willard Gibbs, Vol. I., (Dover Publications, 1961). Eredetiben a fenti címen a Collected Works-ben jelent meg, Yale University Press, 1876.
- [23] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.
- [24] Hisashi Mine and Katsuhisa Ohno, Decomposition of Mathematical Programming Problems by Dynamic Programming and Its Application to Block-Diagonal Geometric Programs, Journal of Math. Anal. and Appl., 32 (1970), 370-385.
- [25] R.C. Johnson, Optimum Design of Mechanical Elements, John Wiley, New York, 1961.
- [26] A. Klinger and O.L. Mangasarian, Logarithmic Convexity and Geometric Programming, Journal of Math. Anal. and Appl., 24 (1968), 388-408.
- [27] B.T. Lieu, A Study of Some Inequalities for Nonlinear Stochastic Programming, Nonlinear Programming-ban, (J. Abadie ed.), North-Holland, Amsterdam, 1967.
- [28] O.L. Mangasarian and J.B. Rosan, Inequalities for Stochastic Nonlinear Programming problems, Operations Research, 12 (1964), 143-154.
- [29] L.D. Pascual and A.B. Israel, Vector-valued Criteria in Geometric Programming, Oper. Res., 19 (1971), 98-102.
- [30] U. Passy, Generalized weighted mean programming, SIAM J. Appl. Math., Vol. 20. No. 4. (June 1971), 763-778.
- [31] U. Passy and D.J. Wilde, Generalized Polynomial optimization, SIAM J. Appl. Math. Vol. 15. No. 5. (September 1967).
- [32] U. Passy and D.J. Wilde, A geometric Programming Algorithm for Solving Chemical Equilibrium Problems, SIAM J. Appl. Math., 16 (1968), 363-373.
- [33] E.L. Peterson, Symmetric duality for generalized geometric programming, SIAM J. Appl. Math., Vol. 19. No. 3. (November 1970).
- [34] E.L. Peterson and J.G. Ecker, Geometric programming: A Unified Duality Theory for Quadratically Constrained Quadratic Programs and l_p -constrained l_p -approximation Problems, (Research Announcement), Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), 316-321.
- [35] E.L. Peterson and J.G. Ecker, Geometric Programming: Duality in Quadratic programming and l_p -approximation I., International Symposium on Mathematical Programming, Princeton, N.J., (1967, August).
- [36] E.L. Peterson and J.G. Ecker, Geometric Programming: Duality in Quadratic programming and l_p -approximation II., (Canonical Programs), SIAM J. Appl. Math., 17 (1969), 317-340.

- [37] E.L. Peterson and J.G. Ecker, Geometric Programming: Duality in Quadratic programming and L_p -approximation III., (Degenerate Programs), J. Math. Anal. Appls. 29 (1970), 365-383.
- [38] E.L. Peterson and J.G. Ecker, Geometric Programming: Duality in Quadratic programming and L_p -approximation IV., (Computational Procedures), in preparation, to be submitted to Math. of Comp.
- [39] N.Z. Shapiro, A Generalized Technique for Eliminating Species in Complex Chemical Equilibrium Calculations, RAND Corp. Memo RM-4205-PR, (Sept. 1964).
- [40] N.Z. Shapiro and L.S. Shapley, Mass Action Laws and the Gibbs Free Energy Function, RAND Corp. Memo RM-3935-1-PR, (Sept. 1964).
- [41] N.Z. Shapiro and L.S. Shapley, Mass Action Laws and the Gibbs Free Energy Function, J. Soc. Indust. Appl. Math., 13 (1965), 353-375.
- [42] J. Stoer and Ch. Witzgall, Convexity and Optimization in Finite Dimensions I, Springer-Verlag, 1970.
- [43] T.K. Sherwood, A course in Process Design, MIT Press, Cambridge, 1963.
- [44] W. B. White and S.M. Johnson and G.B. Dantzig, Chemical Equilibrium in Complex Mixtures, J. Chem. Phys., 28 (1958), 751-755.
- [45] D.J. Wilde, A review of Optimization Theory, Industrial and Engineering Chemistry 57 No. 8. (August 1965).
- [46] D.J. Wilde and C.L. Beightler, Foundations of Optimization, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- [47] W.I. Zangwill, Nonlinear Programming: A unified Approach, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.
- [48] C. Zener, A mathematical aid in optimizing engineering designs, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 47 (1961), 537-539.
- [49] C. Zener, A further mathematical aid in optimizing engineering designs, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 48 (1962), 518-522.
- [50] C. Zener, Minimization of system cost in terms of subsystem cost, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 51 (1964), 162.
- [51] C. Zener, An example of design for minimum total cost, counter-flow heat exchangers, IEEE Trans. Mil. Elec. MIL-8 (1964), 63.

Summary

Geometric programming

The paper deals with the problems of the duality of geometrical programming. A proof, simpler than the usual, is given for the duality theorem of geometrical programming by the use of the Farkas theorem. The approach of the problem is from the dual side of the task, which differs from the other constructions.

Резюме

Геометрическое программирование

Статья занимается проблемами двойственности геометрического программирования. В отличие от других методов построения, автор подходит к проблеме со стороны двойственной задачи, используя теорему Фаркаша. В статье дается более простое доказательство двойственности геометрического программирования.

EGY VÉGES PRIMÁL ALGORITMUS A SZÁLLÍTÁSI FELADAT MEGOLDÁSÁRA

Komáromi Éva

I. A szállítási feladat legismertebb primál algoritmus a "stepping-stone" algoritmus, amely a szimplex módszernek a szállítási feladatra, mint speciális lineáris programozási feladatra való alkalmazása. E módszernek hiányossága, hogy nem zárja ki a ciklizálás lehetőségét, bár ennek a tapasztalat szerint kevés gyakorlati jelentősége van. A jelen dolgozat célja a szállítási feladatra olyan algoritmust adni, amely egy kiinduló lehetséges megoldást minden lépésben úgy módosít, hogy a célfüggvény értéke határozottan csökken, egészen az optimális megoldás eléréséig. A "stepping-stone" algoritmussal összehasonlítva azt mondhatjuk, hogy nem-degenerált bázismegoldás esetén megegyezik azzal, degenerált bázismegoldáshoz pedig bizonyos szabályok szerint felépíti a bázist, ill. "javítja" a megoldást, ha az még nem optimális. Bár a módszer számítástechnikai hatékonyságának elbírálásához összehasonlító adatok egyelőre nem állnak rendelkezésünkre, valószínűnek látszik, hogy ha a feladat bázismegoldásai erősen degeneráltak, a módszer valamivel gyorsabb a "stepping-stone" eljárásnál, s ezért például a hozzárendelési probléma (mint speciális szállítási probléma) megoldására jól alkalmazható.

A dolgozat a szállítási feladatot hálózati folyam-problémaként kezeli, mind a tárgyalásmód, mind a probléma megközelítési módját illetően.

II. Legyen m forrás (termelő) és n nyelő (fogyasztó). Jelölje a források ill. nyelők halmazát I és J . Minden forrástól minden nyelőhöz vezet él és a hálózat csak ezeket az éleket tartalmazza. Jelölje σ_i az i -edik forrás, $-\tau_j$ a j -edik nyelő intenzitását és c_{ij} az (i, j) élen a szállítási egységköltséget, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Olyan $X = \{x_{ij}\}$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) folyamat (szállítási tervet) keresünk, amely minimalizálja a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

célfüggvényt, eleget téve a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sigma_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = \tau_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \sigma_i = \sum_{j=1}^n \tau_j \right)$$

$$(2) \quad x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

korlátozásoknak. Az ilyen szállítási tervet (folyamot vagy megoldást) optimálisnak nevezzük.

III. Ismert a szállítási feladat **optimalitási tétele**: Egy X szállítási terv optimális akkor és csak akkor, ha léteznek olyan U_i , $i = 1, 2, \dots, m$; és U_j , $j = 1, 2, \dots, n$ potenciálok, hogy

$$U_j - U_i \leq c_{ij}, \quad \text{ha } x_{ij} = 0$$

$$U_j - U_i = c_{ij}, \quad \text{ha } x_{ij} > 0.$$

Az itt következő algoritmus egy lehetséges, vagyis (1) és (2)-nek eleget tevő szállítási tervből kiindulva meghatározza a tételben szereplő U_i és U_j potenciálokat. Ha ez nem sikerül, akkor talál egy "jobb" szállítási tervet, amelyre a célfüggvény értéke határozottan kisebb; s ezt kiindulási tervnek tekintve ismétli az eljárást.

IV. Az algoritmus részletes tárgyalása előtt értelmezzünk néhány, a leírásban szereplő kifejezést.

Pozitív él: olyan (i, j) él, amelyen az x_{ij} szállított mennyiség pozitív.

Lánc: Olyan

$$\mu = \{s_1, s_2, \dots, s_\ell\}$$

csúcssorozat, ahol, ha s_k forrás, akkor s_{k+1} nyelő és fordítva, $k = 1, 2, \dots, \ell - 1$.

Más megfogalmazásban: olyan

$$\nu = \{e_1, e_2, \dots, e_\ell\}$$

élsorozat, ahol $e_k = (i_k, j_k)$, amelyre:

$$i_k = i_{k+1}, \quad 1 \leq k < \ell, \quad k \text{ páratlan}$$

és

$$j_k = j_{k+1}, \quad 1 \leq k < \ell, \quad k \text{ páros},$$

vagy

$$i_k = i_{k+1}, \quad 1 \leq k < \ell, \quad k \text{ páros}$$

$$j_k = j_{k+1}, \quad 1 \leq k < \ell, \quad k \text{ páratlan}$$

teljesül.

Pozitív lánc: Egy $i \in I$ csúcsból egy $j \in J$ csúcsba vezető olyan

$$\mu = \{i = i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_\ell, j_\ell = j\}$$

láncc, amelyre $x_{i_k j_k} > 0$, $k = 1, \dots, \ell$. Ha ilyen láncc mentén csökkentjük a szállított mennyiséget a következőképpen:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{i_k j_k} &= x_{i_k j_k} - \delta & k &= 1, \dots, \ell \\ \bar{x}_{i_{k+1} j_k} &= x_{i_{k+1} j_k} + \delta & k &= 1, \dots, \ell - 1,\end{aligned}$$

ahol $0 < \delta \leq \min_{1 \leq k \leq \ell} x_{i_k j_k}$, akkor (2) érvényben marad.

Szabad kapacitású láncc: Egy $i \in I$ csúcsból egy $j \in J$ csúcsba vezető olyan

$$\mu = \{i = i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_\ell, j_\ell = j\}$$

láncc, amelyre $x_{i_{k+1} j_k} > 0$, $k = 1, \dots, \ell - 1$. Ha ilyen láncc mentén növeljük a szállított mennyiséget a következőképpen:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{i_k j_k} &= x_{i_k j_k} + \delta & k &= 1, \dots, \ell \\ \bar{x}_{i_{k+1} j_k} &= x_{i_{k+1} j_k} - \delta & k &= 1, \dots, \ell - 1,\end{aligned}$$

ahol $0 < \delta \leq \min_{1 \leq k < \ell} x_{i_{k+1} j_k}$, akkor (2) érvényben marad.

V. Az eljárás két fázisból áll.

1. fázis: A csúcsokat csoportokba soroljuk úgy, hogy egy csoportba tartozzanak azok a csúcsok, amelyek egymással pozitív élekből álló láncsal összeköthetők. Az egy csoportba tartozó csúcsokhoz meghatározunk potenciálokat; ha azok az optimalitási feltételeknek nem tesznek eleget, javítjuk a folyamatot.

Jelölje K az aktuális csoport sorszámát. Kezdetben $K = 0$.

1/a. lépés: Növeljük a K értékét 1-gyel. Cimkézzünk egy olyan $i \in I$ csúcsot, amelyhez még nem rendeltünk potenciált (kezdetben legyen ez az 1. forrás), tetszőleges, mondjuk az $U_i = 0$ potenciállal.

1/b: Tekintsünk egy cimkézett $i \in I$ csúcsot. Legyen

$$U^j = U_i + c_{ij}$$

minden olyan nem cimkézett j csúcsra, amelyre $x_{ij} > 0$.

Ha ilyen i és j csúcs nincsen, megyünk az 1/c. lépéshez. Különben: tekintsünk egy cimkézett j csúcsot. Legyen

$$U_i = U^j - c_{ij}$$

minden olyan nem cimkézett i csúcsra, melyre $x_{ij} > 0$.

Ha ilyen i és j csúcs nincsen, folytatjuk az 1/c lépéssel. Másként az 1/b lépést ismétljük.

1/c. lépés: Ha újabb csoportot nem tudtunk létrehozni, folytatjuk a 2. fázisnál. Másként:

Jelölje I_K a K -adik csoportba tartozó forrásokat, J_K a nyelőket. Ha a K . csoport csúcsainak potenciáljai az optimalitási feltételeket kielégítik, ismétljük az 1/a. lépést. Ha nem, ez két esetben történhet:

(i) Tegyük fel, hogy valamely $i \in I_K$, $j \in J_K$ csúcspárra:

$$U^j - U_i > c_{ij}$$

Tekintsük a csoport először címkézett $i_0 \in I_K$ csúcsából az i csúcsba vezető azon láncot, amely mentén az i csúcs potenciálját meghatároztuk. Ezt az (i,j) éllel kiegészítve, szabad kapacitású láncot kapunk i_0 -ból j -be. Ha a szállított mennyiséget növeljük ezen lánc mentén és csökkentjük az i_0 -ból a j -be vezető pozitív lánc mentén, amelyen a j csúcs potenciálját meghatároztuk, alkalmas $\delta > 0$ értékkel, akkor az így nyert új \bar{x}_{ij} szállítási tervre az (1) és (2) feltételek érvényben maradnak. A célfüggvény változása pedig:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n c_{pq} \tilde{x}_{pq} - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n c_{pq} \bar{x}_{pq} = \delta U_i + \delta c_{ij} - \delta U^j = \\ &= \delta (U_i + c_{ij} - U^j) < 0. \end{aligned}$$

Az új szállítási terv költsége tehát kisebb a régiénél.

A javítás után megszüntetjük a K . csoportba tartozó csúcsok címkéit, K értékét csökkentjük 1-gyel és folytatjuk az 1/a lépéssel.

(ii) Tegyük fel, hogy valamely $i \in I_K$, $j \in J_K$ csúcspárra

$$U^j - U_i < c_{ij}, \text{ bár } x_{ij} > 0.$$

Növeljük ekkor az $i_0 \in I_K$ csúcsból a j csúcsba vezető szabad kapacitású láncot és csökkentjük az i_0 csúcsból az i csúcson és az (i,j) élen át a j csúcsba vezető pozitív lánc mentén a szállított mennyiséget alkalmas $\delta > 0$ értékkel. Az így kapott új \bar{x}_{ij} szállítási terv az (1) és (2) feltételeknek változatlanul eleget tesz. A célfüggvény változása:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n c_{pq} \bar{x}_{pq} - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n c_{pq} x_{pq} = \delta U^j - \delta U_i - \delta c_{ij} = \\ &= \delta (U^j - U_i - c_{ij}) < 0. \end{aligned}$$

A javítás után megszüntetjük a K . csoport címkéit, K értékét csökkentjük 1-gyel és ismétljük az 1/a lépést.

2. fázis: Az 1. fázisban kapott K számú csoportot rendezzük.

Definíció: Az $\{(I_1, J_1) = (I_{\ell_1}, J_{\ell_1}), (I_{\ell_2}, J_{\ell_2}), \dots, (I_{\ell_s}, J_{\ell_s})\}$ csoportok csoportláncot alkotnak, ha azon j csúcsok közül, melyekre a

$$\begin{aligned} \max_{\substack{i \in I_{\ell_k} \\ i \in J_{\ell_r}}} (U^j - U_i - c_{ij}) &= 0 \\ \text{minden } r < k\text{-ra} \end{aligned}$$

eléretik, van olyan \bar{j} , hogy $\bar{j} \in J_{\ell_{k-1}}$, minden $k = 2, \dots, s$ -re. Azt mondjuk, hogy az (I_{ℓ_k}, J_{ℓ_k}) megelőzi az (I_{ℓ_r}, J_{ℓ_r}) csoportot a sorban, ha $k < r$; közvetlenül megelőzi, ha $k = r - 1$; követi, ha $k > r$.

Lemma: Ha az X optimális szállítási terv és az $\{(I_1, J_1) = (I_{\ell_1}, J_{\ell_1}), (I_{\ell_2}, J_{\ell_2}), \dots, (I_{\ell_s}, J_{\ell_s})\}$ csoportok csoportláncot alkotnak, akkor

$$U^j - U_i \leq c_{ij} \quad i \in I_{\ell_k}, \quad j \in J_{\ell_r}; \quad k, r = 1, 2, \dots, s, \quad k \neq r.$$

Az állítás egyúttal azt jelenti, hogy a csoportláncához tartozó csúcsok potenciáljai az optimalitási feltételeknek eleget tesznek, hiszen $x_{ij} > 0$ csak egy csoporton belül lehetséges.

Bizonyítás: $r < k$ esetre az állítás a csoportlánc definíciójából következik.

Legyen $r > k$. Tegyük fel, hogy az $i_0 \in I_{\ell_k}, j_0 \in J_{\ell_r}$ csúcsokra:

$$U^{j_0} - U_{i_0} > c_{i_0 j_0}.$$

Tekintsük akkor az i_0 csúcsból a j_0 csúcsba vezető

$$\bar{\mu} = \{\mu_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_r\}$$

pozitív láncot, ahol

$$\mu_t = \{i_{t_1}, j_{t_1}, i_{t_2}, j_{t_2}, \dots, j_{t_{p_t}}\}, \quad t = k, k+1, \dots, r$$

$$i_{k_1} = i_0, \quad j_{r_{p_r}} = j_0$$

és

$$U^j - U_i - c_{ij} = 0 \quad (i, j) \in \bar{\mu}.$$

Egy és csak egy ilyen lánc létezik az egyes csoportok és a csoportlánc konstrukciója miatt. Ha csökkentjük a $\bar{\mu}$ lánc mentén és növeljük az (i_0, j_0) él mentén a szállított mennyiséget alkalmas $\delta > 0$ értékkel, akkor az így nyert új \bar{x}_{ij} szállítási terv az (1) és (2) feltételeknek változatlanul eleget tesz. A célfüggvény változása pedig:

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n c_{pq} \bar{x}_{pq} - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n c_{pq} x_{pq} = \\ &= \delta \sum_{(p,q) \in \bar{\mu}} c_{pq} + \delta c_{i_0 j_0} = \delta (c_{i_0 j_0} - U^{j_0} - U_{i_0}) < 0,\end{aligned}$$

ellentmondásban azzal a feltevessel, hogy az X optimális szállítási terv.

Több csoportlánc együttesét csoportfának nevezzük, ha (az 1. csoportot kivéve) a csoportláncokhoz tartozó csoportok mindegyikére az azt közvetlenül megelőző csoport egyértelműen meghatározott. (3. ábra)



3. ábra

Vegyük észre, hogy ha egy csoporthoz tartozó csúcsok potenciáljaihoz hozzáadunk tetszőleges Θ számot, az új potenciálok a csoporton belül az optimalitási feltételeket továbbra is kielégítik. Tegyük fel, hogy az első $M - 1$ csoportból ($M \leq K$) csoportfát alkottunk úgy, hogy a potenciálok különböző csoportláncokhoz tartozó csúcsok esetében is eleget tesznek az optimalitási feltételeknek. (Kezdetben ez a csoportfa az 1. csoport)

2/a. lépés: Legyen

$$\Theta = \max_{\substack{j \in J_\ell \\ i \in I_M}} (U^j - U_i - c_{ij})$$

és i_0, j_0 azon csúcsok, melyekre a maximum elértük. Növeljük az M . csoport csúcsainak potenciálját a Θ értékkel és kapcsoljuk az (i_0, j_0) éllel a csoportfában az $(I(j_0), J(j_0))$ csoporthoz, ahol $(I(j_0), J(j_0))$ jelölje azt a csoportot, amely a j_0 csúcsot tartalmazza.

2/b. lépés: Ha ekkor valamely $j \in J(i_0)$ és $i \in I_\ell$ csúcsokra, ahol (I_ℓ, J_ℓ) megelőzi az $(I(i_0), J(i_0))$ csoportot:

$$U^j - U_i > c_{ij},$$

akkor a lemma bizonyításában leírt módon javítjuk a szállítási tervet és az 1. fázisnál újra kezdjük a potenciálok felépítését. Másként:

2/c. lépés: Legyen

$$\Theta = \max_{\substack{j \in J_\ell \\ i \in I_k \\ k, \ell \leq M}} (U^j - U_i - c_{ij})$$

és i_0, j_0 azon csúcsok, melyekre a maximum elértük. Ha ekkor $\Theta \leq 0$, akkor újabb csoportot vonunk be a csoportfába, vagyis növeljük az M értékét 1-gyel és folytatjuk a 2/a lépéssel, vagy készen vagyunk, ha $M = K$. Másként (kezdetben a $\Theta > 0$ eset csak $j_0 \in J_M$ csúcsra fordulhat elő):

2/d. lépés: Növeljük az $(I(i_0), J(i_0))$ csoport csúcsainak potenciálját Θ -val és kapcsoljuk azt az $(I(j_0), J(j_0))$ csoporthoz az (i_0, j_0) éllel (megszüntetve ezzel esetleg más csoporthoz való korábbi kapcsolódását). Ismételjük a 2/b. lépést.

VI. Az algoritmus programozásakor számos egyszerűsítési lehetőség adódik. Ilyen például az, hogy a 2. fázisban történő javítás után nem töröljük valamennyi csúcs potenciálját, csak a javításban résztvevőket. Ha a kiinduló szállítási tervünk olyan, hogy a pozitív élek csoportjai fákat alkotnak, akkor ezt a tulajdonságát a javítások után is megtarthatja. Ekkor szükségtelen az 1/c. lépés (ii) vizsgálata.

Kiinduló lehetséges megoldás meghatározására ismertetünk két módszert.

1. Legyen

$$\begin{aligned} i &:= 1, j := 1, \\ x_{ij} &:= \min(\sigma_i, \tau_j), \\ (\star) \quad \sigma_i &:= \sigma_i - x_{ij}, \\ \tau_j &:= \tau_j - x_{ij}. \end{aligned}$$

Ha $\sigma_i > 0$, legyen $j := j + 1$, és ismételjük a (\star) eljárást; különben legyen $i := i + 1$ és ismételjük a (\star) eljárást.

2. Legyen

$$\begin{aligned} c_{pq} &= \min_{i \in I, j \in J} c_{ij}, \\ (\star\star) \quad x_{pq} &:= \min(\sigma_p, \tau_q), \\ \sigma_p &:= \sigma_p - x_{pq}, \\ \tau_q &:= \tau_q - x_{pq}. \end{aligned}$$

Ezután legyen

$$c_{pq} = \min_{\substack{i \in \{i | \sigma_i > 0\} \\ j \in \{j | \tau_j > 0\}}} c_{ij}$$

és ismételjük a $(\star\star)$ lépést egészen addig, míg azon indexhalmazok, melyekre a minimumot képezzük, üressé nem válnak.

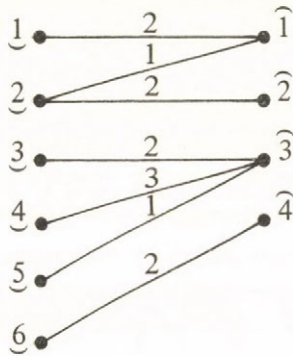
Megjegyezzük, hogy a 2. módszer nem feltétlenül ad az optimálishoz közelebb álló lehetséges megoldást.

Az algoritmus gépi programja a CDC 3300 számítógépre készült, FORTRAN programozási nyelven. Az algoritmus memóriaigénye a költségmátrix és a számításhoz szükséges segédvektorok.

A program jelenleg csak belső memóriát használ, maximálisan 100×100 méretű feladat megoldására alkalmas. A programban a lánckeresés a címkézési technika segítségével történik. Bár egy feladat várható számítási idejét nehéz megbecsülni, mert elsősorban attól függ, hogy a kiinduló megoldás milyen messze van az optimálistól, az első tapasztalatok kedvezőek. Néhány próba-feladat számítási ideje:

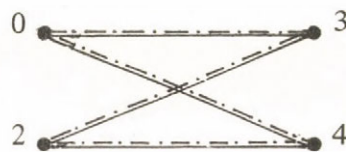
$m = 20,$	$n = 30$	12 mp
$m = 20,$	$n = 80$	36 mp
$m = 30,$	$n = 70$	1 p 10 mp
$m = 40,$	$n = 70$	1 p 41 mp

VII. Tekintsünk végül az algoritmus illusztrálására egy számpéldát. Legyen hálózatunk és kiinduló folyamunk, valamint a költségtáblázat a következő:



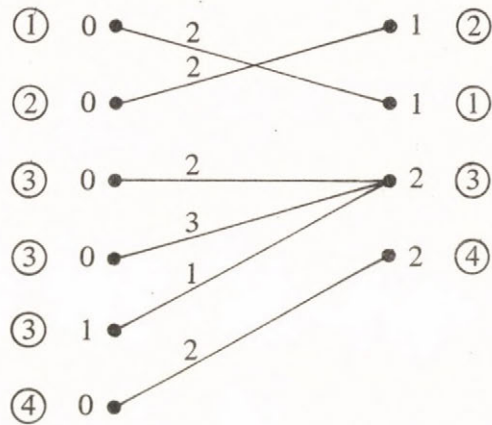
nyelők források	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\underline{1}$	3	1	2	1
$\underline{2}$	1	2	1	1
$\underline{3}$	2	1	2	3
$\underline{4}$	1	2	2	1
$\underline{5}$	2	1	1	1
$\underline{6}$	1	3	1	2

A címkézés az 1. fázisban:



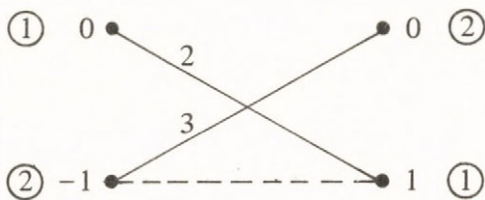
Az első csoport címkézése után $U^2 - U_1 > c_{12}$. Csökkentjük a szállított mennyiséget az $\underline{1} \rightarrow \hat{1} \rightarrow \underline{2} \rightarrow \hat{2}$ lánc mentén és növeljük az $\underline{1} \rightarrow \hat{2}$ élen, 2 egységgel.

Az új szállítási terv és az 1. fázis végén kapott potenciálok: (A potenciálok melletti bekarikázott szám azt mutatja, hogy a csúcs hányadik csoportba tartozik.)



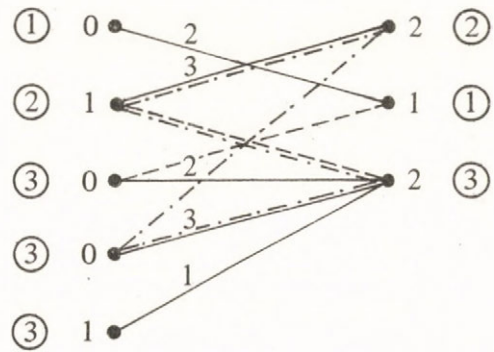
A csoportok összekapcsolása a 2. fázisban:

$M = 2$ -re



a csoportfa: ① → ②

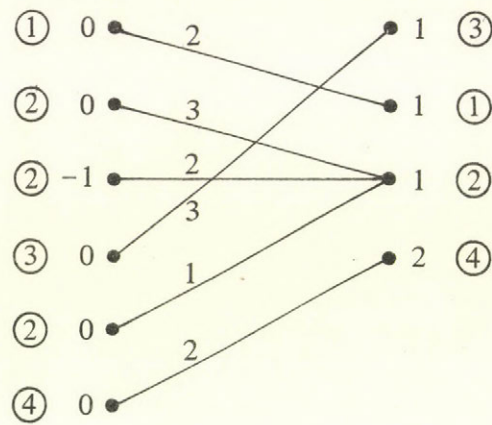
$M = 3$ -ra



a csoportfa: ① → ③ → ②

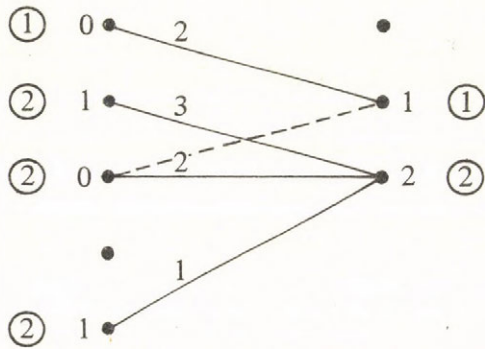
Ekkor $U^1 - U_4 > c_{41}$, javítunk tehát. Növeljük a folyamatot a $4 \rightarrow \hat{1}$ élen és csökkentjük a $4 \rightarrow \hat{3} \rightarrow 2 \rightarrow \hat{1}$ láncban 3 egységgel.

Az új szállítási terv és az első fázis végén nyert potenciálok:



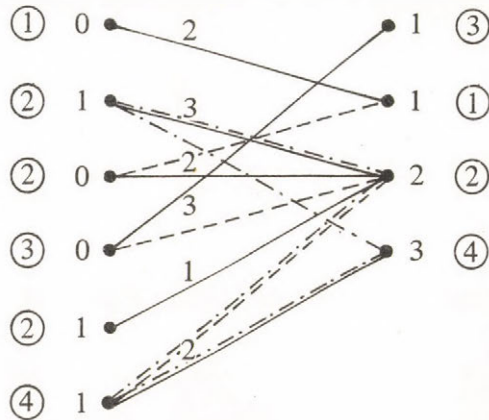
A csoportok összekapcsolása a 2. fázisban:

M = 2-re

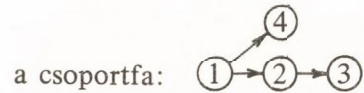


a csoportfa: ① → ②

M = 4-re

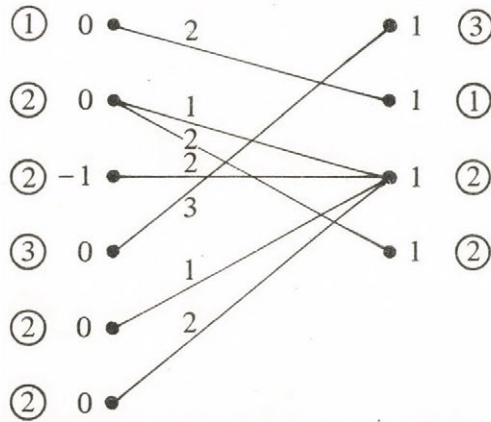


a csoportfa: ① → ② → ③



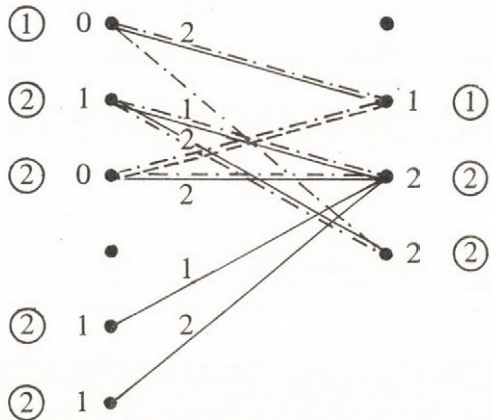
Ekkor $U^4 - U_2 > c_{24}$ és javítunk. Növeljük a folyamatot a $2 \rightarrow 4$ élen és csökkentjük a $2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4$ láncon 2 egységgel.

Az új szállítási terv és az 1. fázis végén kapott potenciálok:



A csoportok összekapcsolása a 2. fázisban:

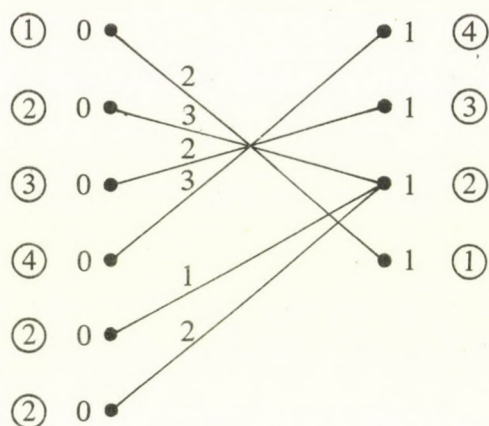
$M = 2$ -re



a csoportfa: $(1) \rightarrow (2)$

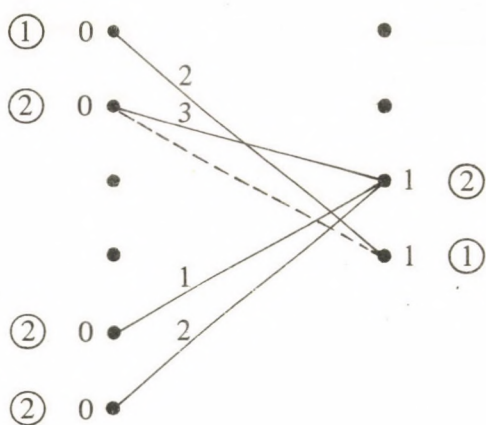
Ekkor $U^4 - U_1 > c_{14}$, ezért növeljük az $1 \rightarrow 4$ élen és csökkentjük az $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ lánc mentén a folyamatot 2 egységgel.

Az új szállítási terv és az 1. végén kapott potenciálok:



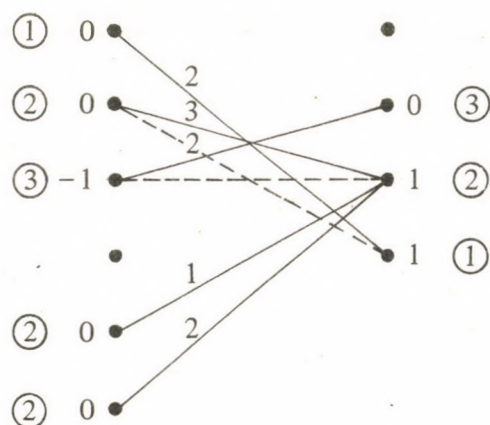
A csoportok összekapcsolása a 2. fázisban:

M = 2-re



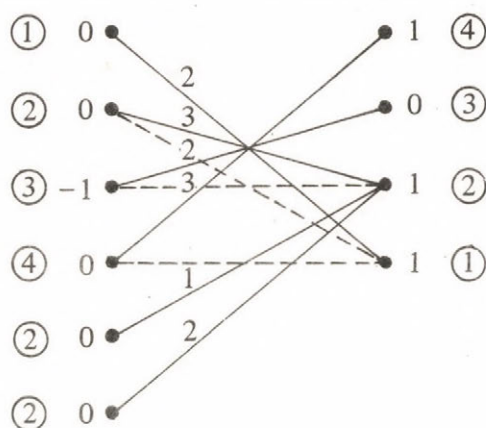
a csoportfa: (1) → (2)

M = 3-ra



a csoportfa: (1) → (2) → (3)

$M = 4\text{-re}$



a csoportfa:

Az így kapott potenciálok az optimalitási feltételeket kielégítik, folyamunk tehát optimális.

I r o d a l o m

- [1] G.B. Dantzig: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [2] L.R. Ford – D.R. Fulkerson: Flows in Networks, Princeton University Press, Princeton, 1962.
- [3] Kéry Gerzson: Módosított "stepping-stone" algoritmus a szállítási probléma megoldására, Sigma, 1970. 2. szám
- [4] Prékopa András: Lineáris programozás I., MTESZ Bolyai János Mat. Társ., Budapest, 1968.

S u m m a r y

A finite primal algorithm to solve the transportation problem

In the recent paper we give an algorithm for solving transportation problem which changes the starting admissible solution in each step to decrease strictly the total cost until reaching the optimal solution.

Р е з ю м е

Конечный прямой алгоритм для решения транспортной задачи

В этой статье дается алгоритм для решения транспортной задачи, который изменяет начальное допустимое решение в каждом шаге для того, чтобы функция стоимости уменьшалась строго до нахождения оптимального решения.

ON THE REGULARITY OF THE SOLUTIONS OF THE VARIATIONAL INEQUALITIES

Robert Kersner

INTRODUCTION

Let X be a real Hilbert's space, X' be the dual to X space (i.e. the space of linear functionals on X).

Let $a(u, v)$ be a bilinear, not necessarily symmetrical form on X satisfying the following conditions ($\|\cdot\|$ -norm on X):

$$(1) \quad |a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|; \quad u, v \text{ from } X, \quad c > 0 \text{ constant}$$

$$(2) \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \text{for every } v \in X, \quad \alpha > 0 \text{ constant}.$$

$R \subset X$ is a closed, convex set, f is an arbitrary element of X' .

Problem A. Find such an element u of R such that

$$(3) \quad a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \text{for every } v \text{ from } R, \quad \text{where} \\ (f, v - u) \text{ is the value of } f \text{ on the element } v - u.$$

In [1] it is proved, that the problem A has a unique solution. The inequalities of type (3) are called variational inequalities. Their significance lays in the fact that with their help one can search important problems arising in physics and leading to the non-standard boundary problems of the equations with partial derivatives. For illustration this see an example (cf. [4]).

Let Ω be an open, bounded set of the space R^n , Γ the bound of Ω .

Problem B. (cf. [5]). Find the function $u = u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$, where x from Ω , for which

$$(4) \quad -\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \text{and}$$

$$(5) \quad u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0, \quad u \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad \text{where} \\ \nu \text{ is the external normal to } \Gamma.$$

We verify that the problem B is a simple variational problem of type (3).

Let us denote the Sobolev's space, i.e. the space of functions belonging together with their first derivatives to $L^2(\Omega)$, by $W_2^1(\Omega)$. This is a Hilbert's space, the scalar product is defined by

$$(v, u) = \int_{\Omega} (v \cdot u + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}) dx.$$

Define a functional on $W_2^1(\Omega)$ (supposing that f from $L^2(\Omega)$)

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v^2 + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial v}{\partial x_i})^2) dx - \int_{\Omega} f v dx.$$

Let $K \subset W_2^1(\Omega)$ be a set of (almost everywhere) non-negative on Γ functions. K is obviously a closed and convex set.

Let us prove that the problem B is equivalent to the problem of finding $\inf J(v)$, where v from K and consequently, it allows a unique solution. Indeed, the function $J(v)$ is continuous and strictly convex on W_2^1 and $J(v) \rightarrow +\infty$ when $\|v\| \rightarrow \infty$. There exists a unique u from K , that

$$(6) \quad J(u) \leq J(v)$$

for every v from K . (cf [7]).

Set $a(u, v) = \int_{\Omega} (u \cdot v + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx$. It is clear, that

$$(7) \quad (J'(u), v) = a(u, v) - (f, v).$$

The inequality (6) is equivalent to $(J'(u), v - u) \geq 0$ for every v from K .

From this and (7) we obtain

$$(8) \quad \begin{cases} a(u, v - u) \geq (f, v - u) \text{ for every } v \text{ from } K \\ u \text{ comes within } K. \end{cases}$$

So we came up to the problem A. We shall verify that (8) is equivalent to (4) - (5).

Let us suppose, that the function φ is infinitely differentiable and let has a compact support. (The support of a function φ (denoted $\text{supp } \varphi$) is the closure of the set of the points, where φ is different from zero.) Substitute $v = u \pm \varphi$ in (8). We obtain

$$(9) \quad a(u, \varphi) = (f, \varphi),$$

consequently u satisfies (4) in sense of distributions in Ω . Multiply (4) by $v - u$, and integrate the obtained equality on Ω and apply the Green's formula, we obtain

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} (v - u) d\Gamma + a(u, v - u) = (f, v - u).$$

Thus, (8) is equivalent to the following:

$$(10) \quad \begin{cases} u \in K, \quad -\Delta u + u = f \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} (v - u) d\Gamma \geq 0 \text{ for every } v \text{ from } K. \end{cases}$$

It can be easily proved that $u \geq 0$ on Γ , $\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} (v - u) d\Gamma \geq 0$ for every v from K are equivalent to (5).

Other problems of physics and functional analysis leading also to variational inequalities one can find in [6]. In this paper we have proved the a priori estimations of the solution of the inequalities of type (3).

A few words on the notations:

$a \in A$ means, that the element a comes within A ; $\forall a$ for every a ; $\forall a \in A \equiv$ for every a from A $a = \|a_{ij}\|$ a matrix with element a_{ij} .

$(,)$ the scalar product in the number space \mathbf{R}^n $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$, $u_x = u_x(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

The essential maximum of a measurable in Ω function $f(x)$ is the constant M , that $f(x) \leq M$ almost everywhere and $\forall \epsilon > 0$ $\text{mes}\{x \in \Omega: f(x) \geq M - \epsilon\} > 0$.

Riesz's theorem: When $u(x) \in L_p(\Omega)$ $\forall p \geq 1$ then

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p = \text{vrai max}_{\Omega} |u|,$$

where $\|u\|_p = (\int_{\Omega} |u|^p dx)^{1/p}$ and $\text{vrai max}_{\Omega} |u|$ is the essential maximum of $|u|$.

THE A PRIORI ESTIMATIONS

Let Ω be a bounded domain in \mathbf{R}^n , $\dot{W}_2^1 = \dot{W}_2^1(\Omega)$ is the Sobolev's space. ($u \in \dot{W}_2^1 \Leftrightarrow u \in W_2^1$ and $u = 0$ on $\partial\Omega$) $R = \{v \in \dot{W}_2^1: v \geq 0 \text{ on } \Omega\}$.

Let $f \in L_2(\Omega)$, $a = \|a_{ij}\|$, $a_{ij} = a_{ij}(x)$ be bounded, measurable functions on Ω , $(|a_{ij}| \leq \Lambda)$ and $(a\xi, \xi) \geq \lambda^{-1} |\xi|^2$, $\forall \xi \in \mathbf{R}^n$, $\forall x \in \Omega$.

Let us see the following problem ("problem A"):

Find the function $u(x)$ from R , that

$$(11) \quad \int_{\Omega} (au_x, (V - u)_x) dx \geq \int_{\Omega} f(V - u) dx \quad \forall V \in R.$$

It is known (cf. [1]), that the problem A has a unique solution. Further the properties of this solution are studied.

Theorem 1. Let $u(x)$ be the solution of the problem A;

$$f \in L_p(\Omega), \quad p > \frac{n}{2}.$$

Then $\text{vrai} \max_{\Omega} u^2 \leq c \|f\|_{L_p(\Omega)}$, where $c = c(n, p, \lambda, \Omega)$.

Proof. Let the function $F(u)$ satisfy the conditions

- a) $F''(u) \geq 0$, $F''(u) = 0$, at $u \geq u_0$
- b) $F(u)$ is defined at $u \geq 0$
- c) $F(u) \geq 0$, $F'(u) \geq 0$, $F(0) = 0$.

The function $\frac{F(u) \cdot F'(u)}{u} \equiv \frac{g(u)}{u}$ is bounded on the u -axis, so if $\epsilon > 0$ is sufficiently small then the function $V = u - \epsilon g(u)$ comes within R .

Substitute it (11):

$$(12) \quad \int_{\Omega} (au_x, (g(u))_x) dx \leq \int_{\Omega} f \cdot g(u) dx.$$

As $(g(u))_x = F'^2(u)u_x + F(u)F''(u)u_x$, we obtain from (12)

$$(13) \quad \int_{\Omega} (au_x F'(u), u_x F'(u)) dx + \int_{\Omega} F(u)F''(u)(au_x, u_x) dx \leq \int_{\Omega} fF(u)F'(u) dx.$$

The second integral in the left-hand side is non-negative, we omit it.

Set $w = F(u)$. From (13) we have

$$\int_{\Omega} w_x^2 dx \leq \lambda \left| \int_{\Omega} fF(u)F'(u) dx \right| \equiv \lambda I.$$

Estimate I in two cases: 1) $F(u) \equiv u$. Then

$$(14) \quad I \leq \int_{\Omega} |f| u dx \leq \|f\|_{L_2} \cdot \|u\|_{L_2}.$$

The following fact is known (Sobolev's inequality, cf. e.g. [3]): if $u \in \dot{W}_2^1$ then

$$(15) \quad \left(\int_{\Omega} |u|^{2k} dx \right)^{1/k} \leq c(n) \int_{\Omega} u_x^2 dx,$$

where $1 \leq k \leq \frac{n}{n-2}$ at $n \geq 3$ and k is an arbitrary positive constant at $n = 2$.

From (14) and (15) we obtain the estimation

$$(16) \quad \left(\int_{\Omega} u^{2k} dx \right)^{1/k} \leq c \|f\|_{L_p}.$$

2) $F(u)$ is one of the members of the serie convergent to u^m ($m > 1$) in norm of C^1 . Set $z = u^m$. Suppose that $z \in L_{2q}(\Omega)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. The function $w = F(u)$ can be chosen so, that $uF'(u)F(u) \leq mu^{2m} = mz^2$ and $F(u)F'(u) \leq mu^{2m-1} = mz^{2(1-\frac{1}{2m})}$.

Due to Hölder's inequality we have

$$I \leq m \left| \int_{\Omega} f z^{2(1 - \frac{1}{2m})} dx \right| \leq m \|f\|_{L_p} \cdot \left(\int_{\Omega} z^{2q(1 - \frac{1}{2m})} dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

As

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} z^{2q(1 - \frac{1}{2m})} dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leq (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2mq}} \left(\int_{\Omega} z^{2q} dx \right)^{(1 - \frac{1}{2m}) \cdot \frac{1}{q}} \equiv \\ &\equiv (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2mq}} \cdot N^{1 - \frac{1}{2m}}. \end{aligned}$$

$$(17) \quad I \leq m \|f\|_{L_p} \cdot m^{-1} (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2mq}} \cdot m \cdot N^{1 - \frac{1}{2m}}.$$

Apply the inequality $|ab| \leq \frac{|a|^\alpha}{\alpha} + \frac{|b|^\beta}{\beta}$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, $\alpha > 1$ to (17), setting

$$a = m N^{1 - \frac{1}{2m}}, \quad b = m^{-1} (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2mq}}, \quad \alpha = \frac{2m}{2m-1} \quad \text{and} \quad \beta = 2m:$$

$I \leq c(m^3 N + m^{-2m}) \cdot \|f\|_{L_p}$, that is

$$(18) \quad \int_{\Omega} w_x^2 dx \leq c \|f\|_{L_p} [m^3 \left(\int_{\Omega} z^{2q} dx \right)^{\frac{1}{q}} + m^{-2m}].$$

In this inequality due to Fatou's lemma one can take $w \rightarrow z$ where $w = F(u)$, $z = u^m$:

$$\int_{\Omega} z_x^2 dx \leq c \|f\|_{L_p} [m^3 \left(\int_{\Omega} z^{2q} dx \right)^{\frac{1}{q}} + m^{-2m}].$$

Having combined this inequality with (15) (at $u = z$) we obtain the estimation

$$(19) \quad \left(\int_{\Omega} z^{2k} dx \right)^{\frac{1}{k}} \leq c \|f\|_{L_p} [m^3 \left(\int_{\Omega} z^{2q} dx \right)^{\frac{1}{q}} + m^{-2m}].$$

Set $k = \frac{n}{n-2}$. As $q = \frac{p}{p-1}$ and $p > \frac{n}{2}$, $k > q$ (at $n \geq 3$).

If $n = 2$ then let $k \in (q, 2)$.

Set $m = \left(\frac{k}{q}\right)^\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$, and

$$\Theta_\nu \equiv \left(\int_{\Omega} u^{2k^{\nu+1} q^{-\nu}} dx \right)^{k^{-\nu-1} q^\nu} = \left(\int_{\Omega} z^{2k} dx \right)^{\frac{1}{km}} \quad (\text{as } z = u^m).$$

Note, that $m^3 \leq c^\nu$. (19) gives

$$(20) \quad \frac{\Theta_\nu}{\|f\|_{L_p}^m} \leq (c^{\nu+1} \Theta_{\nu-1}^m + c m^{-2m})^{\frac{1}{m}} \leq c^{(\nu+1)(\frac{q}{k})^\nu} [\Theta_{\nu-1} + (\frac{q}{k})^{2\nu}].$$

From the inequality (15) follows, that $\Theta_0 = (\int_\Omega u^{2k} dx)^{\frac{1}{k}} < \infty$. From (20) we obtain successively $\Theta_\nu < \infty$, $\Theta_2 < \infty$, etc. Iterate (20):

$$\Theta_\nu \leq c_1^{\sum_1^{\infty} (\nu+1)(\frac{q}{k})^\nu} [\Theta_0 + \sum_1^{\infty} (\frac{q}{k})^{2\nu}] \|f\|_{L_p}^{\frac{1}{m}}.$$

Due to Riesz's theorem

$$\text{vrai max}_\Omega u^2 \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Theta_\nu \leq c[(\int_\Omega u^{2k} dx)^{\frac{1}{k}} + 1].$$

Having combined this with (16) we obtain the statement of the theorem.

K_ρ -ball with radius ρ ; $\text{vrai max}_{K_r} u = M$, $\text{vrai min}_{K_r} u = m$, $\text{osc}(u; K_r) = M - m$;
 $\text{vrai max}_\Omega u = M_0$.

$\Omega_\delta = \{x \in \Omega: \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \delta\}$, $\delta < 1$, $\text{dist}(x, \delta\Omega)$ the distance from x to $\delta\Omega$.

Theorem 2. Let $u(x)$ be the solution of the problem A. Then for each $x_1, x_2 \in \Omega_\delta$ the estimation

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq c_\delta |x_1 - x_2|^\alpha$$

is valid, where c_δ and α depends only on $n, p, \lambda, \Lambda, M, f$ and δ .

Lemma. Let $u(x)$ be the solution of the problem A; $f \in L_p(\Omega)$, $p > \frac{n}{2}$;
 $r^{\frac{\gamma}{2}} \|f\|_{L_p(K_{2r})} \leq 1$ where $\gamma = 1 - \frac{n}{2p}$; $r \leq c$.

When $\frac{r^\gamma}{M-m} \leq 1$

$$\text{osc}(u; K_{\frac{r}{2}}) \leq \eta \cdot \text{osc}(u; K_r) \quad \text{where } \eta \in (0, 1) \text{ is constant.}$$

(If $\frac{r^\gamma}{M-m} > 1$ then obviously $\text{osc}(u; K_{\frac{r}{2}}) \leq \text{osc}(u; K_r) = M - m < r^\gamma$).

Proof of the lemma. Suppose that $K_{2r} \subset \Omega$. Let $\psi(x) \geq 0$ be a function satisfying the Lipschitz's condition, $\text{supp } \psi \subset K_{2r}$.

$$\eta(|x|) = \begin{cases} 1 & \text{at } 0 \leq |x| \leq r \\ 0 & \text{at } |x| \geq 2r \\ \frac{2r - |x|}{r} & \text{at } r \leq |x| \leq 2r. \end{cases}$$

Take one more function $G(\sigma)$ defined at $\sigma > 0$ and satisfying the conditions

- 1) $G''(\sigma) \geq G'^2(\sigma)$, $G'(\sigma) \leq 0$, $G(\sigma) \geq 0$
- 2) $G(\sigma) \sim -\ln \sigma$ at $\sigma \rightarrow +0$
- 3) $G(\sigma) = 0$ at $\sigma \geq 1$.

There exists such a function, e.g.

$$G(\sigma) = \begin{cases} -\frac{\sigma^2}{2} + 2\sigma - \ln \sigma - \frac{3}{2} & \text{at } \sigma \in (0, 1] \\ 0 & \text{at } \sigma \geq 1. \end{cases}$$

There are two cases:

- a) $u \geq \frac{M+m}{2}$ on a certain set $N \subset K_r$ with $\text{mes } N \geq \frac{1}{2} \text{mes } K_r$ or
- b) $u \leq \frac{M+m}{2}$ on the set N .

If the case a) is true the function $v^{(1)} = 1 + \frac{u - \frac{M+m}{2}}{\frac{M-m}{2}}$ on N is not less than 1. It is clear that $v^{(1)} \geq 0$.

Let $\epsilon > 0$ be an arbitrary number, we shall choose it later. The substitution

$$V = u - G'(v^{(1)} + \epsilon)\psi$$

is allowed in (11). Having substituted we have

$$\int (av_x^{(1)}, (G'(v^{(1)} + \epsilon)\psi)_x) dx \leq \frac{2}{M-m} |\int f \cdot G'(v^{(1)} + \epsilon)\psi dx|.$$

(Here and further the integrals are taken on $\text{supp } \psi$.)

In the case b) we take the function $v^{(2)} = 1 - \frac{u - \frac{M+m}{2}}{\frac{M-m}{2}}$. It is obviously that $v^{(2)} \geq 1$ on N and $v^{(2)} \geq 0$.

Verify that the substitution

$$V = u + \lambda G'(v^{(2)} + \epsilon)\psi,$$

when $\lambda \geq 0$ is sufficiently small, is allowed in (11).

Indeed, when $v^{(2)} \geq 1$, $G'(v^{(2)} + \epsilon) = 0$ due to the definition G . And if $v^{(2)} < 1$, then $M - \frac{M-m}{2} v^{(2)} \geq \frac{M+m}{2} > 0$ and when $\lambda > 0$ is sufficiently small $\lambda |G'(v^{(2)} + \epsilon)| < \frac{M+m}{2}$ since $G'(v^{(2)} + \epsilon)$ is bounded.

Substitute V in (11) and divide both sides by $\lambda > 0$:

$$\int (av_x^{(2)}, (G'(v^{(2)} + \epsilon)\psi)_x) dx \leq \frac{2}{M-m} \int |f \cdot G'(v^{(2)} + \epsilon)\psi| dx.$$

Thus, both functions $v = v^{(1)}$ and $v = v^{(2)}$ satisfy the inequality

$$(21) \quad \int [(av_x, G''(v + \epsilon)v_x\psi) + (av_x, G'(v + \epsilon)\psi_x)] dx \leq \frac{2}{M-m} \int |f \cdot G'\psi| dx.$$

As $G'' \geq G'^2$ and $|G'(v + \epsilon)| \leq \frac{1}{\epsilon}$, from (21) follows

$$(22) \quad \int [aG'(v + \epsilon)v_x, G'(v + \epsilon)v_x]\psi + (aG'(v + \epsilon)v_x, \psi_x)] dx \leq \frac{2}{\epsilon(M-m)} \int |f|\psi dx.$$

If one omit the first component on the left side of (22) (which is non-negative), then one can see from the obtained inequality that the function $z = G(v + \epsilon)$ is the non-negative generalized subsolution of the equation

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)z_{x_i})_{x_j} = \frac{2}{\epsilon(M-m)} |f|.$$

It is known (cf. [2]) that if $\frac{r^\gamma}{M-m} < 1$, $\frac{r^\gamma}{\epsilon} < 1$, $r^{\gamma/2} \|f\|_{L_p(K_{2r})}$ then

$$(23) \quad \text{vrai} \max_{K_{\frac{r}{2}}} z^2 \leq c(r^{-n} \int_{K_r} z^2 dx + 1).$$

Set in (22) $\psi(x) = \eta^2(|x|)$ and $z = G(v + \epsilon)$

$$(24) \quad \int (az_x\eta, z_x\eta) dx + 2 \int (az_x\eta, \eta_x) dx \leq \frac{2}{\epsilon(M-m)} \int |f|\eta^2 dx.$$

Apply the inequalities $(az_x\eta, z_x\eta) \geq \lambda^{-1} |z_x\eta|^2$ and $2|(az_x\eta, \eta_x)| \leq \Lambda(E|z_x\eta|^2 + \frac{1}{E}\eta_x^2)$ where $E > 0$ is an arbitrary number; we have from (21)

$$\frac{1}{\lambda} \int |z_x\eta|^2 dx \leq \Lambda E \int |z_x\eta|^2 dx + \frac{\Lambda}{E} \int \eta_x^2 dx + \frac{2}{(M-m)\epsilon} \int |f|\eta^2 dx.$$

Set $E = \frac{1}{2\lambda\Lambda}$:

$$(25) \quad \int |z_x\eta|^2 dx \leq 4\lambda^2\Lambda^2 \int \eta_x^2 dx + \frac{4\lambda}{\epsilon(M-m)} \int |f|\eta^2 dx.$$

Estimate the right-hand side of (25): $4\lambda^2\Lambda^2 \int_{K_{2r}} \eta_x^2 dx \leq cr^{n-2}$ since $|\eta_x| \leq \frac{1}{r}$.

$$\begin{aligned} \frac{4\lambda}{(M-m)\epsilon} \int_{K_{2r}} |f| \eta^2 dx &\leq \frac{4\lambda}{(M-m)\epsilon} \|f\|_{L_p(K_{2r})} (\text{mes } K_{2r})^{1-\frac{1}{p}} = \\ &= c \cdot \frac{r^\gamma}{M-m} \frac{r^{\frac{\gamma}{2}}}{\epsilon} \cdot r^{\frac{\gamma}{2}} \cdot \|f\|_{L_p(K_{2r})} \cdot r^{n-2} \end{aligned}$$

since $2\gamma + n - 2 = n(1 - \frac{1}{p})$.

Due to the conditions of the lemma, we have

$$(26) \quad \int_{K_r} z_x^2 dx \leq cr^{n-2}.$$

It is known (cf. [3] or [2]) that if $w(x) \in W_2^1(K_r)$, $N_1 \subset K_r$, $\text{mes } N_1 \geq \frac{1}{2} \text{mes } K_r$ then $r^{-n} \int_{K_r} |w|^2 dx \leq c(r^{-n+2} \int_{K_r} w_x^2 dx + r^{-n} \int_{N_1} w^2 dx)$.

Set here $N_1 = N$, $w = z$. As $v = 1$ on N , $z = G(v + \epsilon) = 0$ on N and consequently

$$\int_{K_r} z^2 dx = cr^2 \int_{K_r} z_x^2 dx,$$

and this inequality combined with (26) gives the inequality

$$(27) \quad \int_{K_r} z^2 dx \leq cr^n.$$

Having combined (27) and (23) we obtain

$$\text{vrai max}_{K_{\frac{r}{2}}} z^2 \leq c_1 \quad \text{i.e.} \quad -z \geq -\sqrt{c_1} = -c_2$$

or due to the definition of the function $z = G(v + \epsilon)$: $\ln(v + \epsilon) \geq -c_2$ that is

$$(28) \quad v + \epsilon \geq e^{-c_2} = c_3 \quad \text{in} \quad K_{\frac{r}{2}}, \quad c_3 \in (0, 1).$$

Beside the condition $\epsilon^{-1} \cdot r^{\frac{\gamma}{2}} \leq 1$ we require that $\epsilon \leq \frac{c_3}{2}$ were fulfilled, which can be reached by decreasing r , since c_3 doesn't depend on r . If it is valid, then from (28) follows that in $K_{\frac{r}{2}}$ $v \geq \frac{c_3}{2} = c_4$, $c_4 \in (0, \frac{1}{2})$. This means in case a) that

$$1 + \frac{u - \frac{M+m}{2}}{\frac{M-m}{2}} \geq c_4 \quad \text{i.e.} \quad u \geq \frac{M-m}{2} c_4 + m \quad \text{in} \quad K_{\frac{r}{2}}$$

$$\text{osc}(u; K_{\frac{r}{2}}) \leq M - \frac{M-m}{2} c_4 - m = (1 - \frac{c_4}{2})(M-m) = \eta \cdot \text{osc}(u; K_r).$$

In case b)

$$1 - \frac{u - \frac{M+m}{2}}{\frac{M-m}{2}} \geq c_4 \quad \text{i.e.} \quad u \leq M - \frac{M-m}{2} c_4 \quad \text{in} \quad K_{\frac{r}{2}},$$

so

$$\text{osc}(u; K_{\frac{r}{2}}) \leq M - \frac{M-m}{2} c_4 - m \equiv \eta \text{osc}(u; K_r).$$

The lemma is proved.

The theorem 2 can be easily obtained from this lemma (cf. [2]) if we set $\alpha = \min(\log_{\frac{1}{2}} \eta, \gamma)$.

Bibliography

- [1] J.L. Lions and G. Stampacchia: Variational Inequalities, Comm. on Pure and Appl. Math. V. XX. pp. 493-519.
- [2] С. Н. Кружков: Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. Мат. сборник, т.65 (107) № 4, 1964.
- [3] С. Л. Соболев: Некоторые применения функционального анализа к математической физике, Издательство ЛГУ, 1950.
- [4] Ж. Л. Лионс: О неравенствах в частных производных, УМН, т. XXVI., 2, 1971.
- [5] Signorini: Questioni di elasticita non linearizzata e semi linearizzata, Rend. di Mat. e delle sue Appl. 18 (1959).
- [6] Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, V. 269, Ser. A, N-13.
- [7] J. Céa: Optimisation théorie et algorithmes, chapitre 3.

Summary

On the regularity of the solutions of the variational inequalities

The paper deals with apriori estimates of the solutions of the so-called variation inequalities. It proves that on adequate conditions the solutions have bounds and satisfy the Hölder condition.

Р е з ю м е

О регулярности решения вариационных неравенств

В работе рассматриваются априорные оценки решений так называемых вариационных неравенств. Доказывается, что при подходящих условиях решения ограниченные и удовлетворяют условию Гельдера.

A LAX-MILGRAM-TÉTEL ÁLTALÁNOSÍTÁSA

Lipcsey Zsolt

Legyenek E, F tetszőleges, lokálisan konvex topologikus vektorterek. Legyen $v \in E \rightarrow F$ lineáris leképezés $D(v) \subset E$ értelmezési tartománnyal, amelyről feltesszük, hogy altér.

A v – általában nem folytonos – lineáris leképezés t_v transzponáltját definiáljuk a következőképpen:

Legyen $D(v)^*$ a $D(v)$ -n értelmezett lineáris funkcionálok tere, F' az F duális tere.

A $t_v: F' \rightarrow D(v)$ leképezést mármost értelmezzük úgy, hogy minden $y' \in F', x \in D(v)$ esetén álljon fenn a

$$\langle t_v y'; x \rangle = \langle y'; vx \rangle$$

egyenlőség.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a t_v -ről azért nem tudunk többet, mert v általában nem folytonos, és $D(v)$ nem sűrű E -ben.

Segéd-tétel: A v lineáris leképezés $R(v)$ értékkészlete akkor és csak akkor sűrű F -ben, ha t_v injektív.

Bizonyítás: Az $R(v) \subset F$ konvex halmaz akkor és csak akkor sűrű F -ben, ha az $\langle y'; R(v) \rangle = \{0\}$ egyenlőségből következik, hogy $y' = 0$.

Az y' akkor és csak akkor tűnik el $R(v)$ -n, ha $t_v(y') = 0$. Ezt az előzővel összevetve, éppen a tételt kapjuk.

Ismeretes, hogy $D(v)$ algebrailag izomorf a v $\Gamma(v) \subset E \times F$ grafikonjával. Ezzel az izomorfizmussal az $E \times F$ szorzat topológia által $\Gamma(v)$ -n indukált topológiát átvihetjük $D(v)$ -re, úgy, hogy az izomorfizmus egyúttal homeomorfizmus is lesz.

$D(v)$ -t e topológiával ellátva v folytonos lesz. Az így definiált topológia, mint ismeretes, lokálisan konvex, ha az E, F terek ilyenek. A $D(v)$ normálható lesz, ha az E, F terek normálhatók, de a teljességhez E, F teljessége mellé meg kell követelni, hogy $\Gamma(v)$ zárt legyen.

1. Tétel: Legyen $A \in B \rightarrow E$ zárt lineáris leképezés, B Banach tér, E normált tér, $D(A) \subset B$ altér.

I. Ha létezik A -tól függő olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in D(A)$ -hoz található $0 \neq y' \in E'$, úgy, hogy

$$\langle y'; Ax \rangle \geq \delta \cdot \|y'\|_{E'} \cdot \|x\|_B,$$

akkor létezik A -nak E zárt alterén értelmezett folytonos inverze.

II. Ha ezeken felül még a $H = \bigcup_{0 \neq x \in D(A)} \{y'; \langle y'; Ax \rangle \geq \delta \cdot \|y'\| \cdot \|x\|, \quad y' \in E'\}$ halmazzal $E' \subset H$, akkor $\text{im}(A) = E$.

A tétel feltételei egyúttal szükséges feltételei is az egész téren értelmezett folytonos inverz létezésének.

Bizonyítás: I. Elegendőség igazolása:

1) Ha $0 \neq x \in D(A)$, akkor létezik a tétel I. részében szereplő feltételek szerint olyan $0 \neq y' \in E'$, hogy fennáll a következő:

$$\|y'\|_{E'} \cdot \|Ax\|_E \geq \langle y'; Ax \rangle \geq \delta \cdot \|y'\|_{E'} \cdot \|x\|_B.$$

Ennek az egyenlőtlenség-láncnak az első és utolsó tagjából következik, hogy $y' \neq 0$ esetén

$$\|Ax\|_E \geq \delta \cdot \|x\|_B,$$

azaz $x \neq 0$ esetén $Ax \neq 0$, tehát A injektív.

A^{-1} folytonos ugyanis $z \in R(A)$ -ra,

$$A^{-1} z = x, \quad Ax = z.$$

Ezeknek az egyenlőségeknek a felhasználásával a fenti egyenlőtlenség így írható fel:

$$\|z\|_E \geq \delta \cdot \|A^{-1} z\|,$$

s ez éppen A^{-1} folytonosságát jelenti.

2) Belátjuk, hogy $R(A)$ E -ben zárt. Legyen $z \in \overline{R(A)}$. Ehhez létezik olyan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R(A)$, hogy $z_n \rightarrow z$. A^{-1} folytonossága miatt $\{A^{-1} z_n\}_{n=1}^{\infty}$ B -ben Cauchy sorozat, amely B teljessége folytán tart $x \in B$ -hez, azaz $(x, z) \in \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(A)$, mert A zárt. Ez azonban $Ax = z$ egyenlőséget adja, amiből $z \in R(A)$ már következik.

3) Ha $E' \subset H$, ez azt jelenti, hogy $y' \neq 0$ -ra létezik olyan $0 \neq x \in B$, hogy $\delta \cdot \|y'\| \cdot \|x\| \leq \langle y'; Ax \rangle \neq 0$ azaz $y' \neq 0$ esetén $t_A y' \neq 0$, azaz t_A injektív. Ebből következik, hogy $R(A)$ sűrű E -ben, ez az utóbbi zárt, tehát $R(A) = E$.

II. Szükségesség bizonyítása:

Feltesszük, hogy $A \in B \rightarrow E$ lineáris leképezésnek létezik egész E -n értelmezett folytonos inverze.

1) Miután A^{-1} folytonos, és $D(A^{-1}) = E$, $\Gamma(A^{-1})$ zárt, s ami ezzel ekvivalens, $\Gamma(A)$ zárt.

2) Legyen $x \in D(A)$ tetszőleges. A Hahn-Banach tételből következik, hogy $Ax \in E$ -hez létezik olyan $y' \in E'$ funkcionál, hogy $\|y'\| = 1$, $\langle y'; Ax \rangle = \|Ax\|$. Azonban A^{-1} folytonosságát felhasználva kapjuk:

$$\langle y'; Ax \rangle = \|Ax\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|x\| = \frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|x\| \cdot \|y'\|.$$

Az egyenlőtlenség-lánc első és utolsó tagját nézve éppen a tétel I. felét kapjuk, $0 < \delta \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ -val.

3) Legyen $y' \in E'$ tetszőleges. Ha $R(A) = E$, úgy létezik $0 < h < 1$ -hez olyan x , hogy $\|Ax\| = 1$, és

$$\langle y'; Ax \rangle \geq h \cdot \|y'\| = h \cdot \|y'\| \cdot \|Ax\|.$$

Az egyenlőtlenség-sorozat utolsó tagjában felhasználjuk A^{-1} folytonosságát, és kapjuk a kívánt egyenlőtlenséget:

$$\langle y'; Ax \rangle \geq h \cdot \|y'\| \cdot \frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|x\|.$$

Ha $\delta = h \cdot \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ -t választjuk fix $0 < h < 1$ mellett, megkapjuk a szükséges feltételt:

A bizonyított tételben erős az a megszorítás, hogy $E' = H$. Nézzük meg, mikor biztosítható t_A injektív volta, abból, hogy E' -nek csupán egy sűrű részhalmaza tudom belátni az I. feltétel teljesülését.

Ha $H \subset E'$ sűrű, ez azt jelenti, hogy $0 \neq y' \in E'$ -re létezik olyan $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$, hogy $y'_n \rightarrow y'$. Az y'_n -höz létezik $x_n \in D(A)$ úgy, hogy $\|x_n\| = 1$ és $\langle y'_n; Ax_n \rangle \geq \delta \cdot \|y'_n\| \cdot \|y_n\|$.

$$(1) \quad \langle y'; Ax_n \rangle = \langle y' - y'_n; Ax_n \rangle + \langle y'_n; Ax_n \rangle.$$

Tételünk bizonyításához elegendő lenne, ha ki tudnánk mutatni, hogy a jobb oldalon szereplő $a_n = \langle y' - y'_n; Ax_n \rangle$ sorozat nullához tart.

$$\langle y'_n; Ax_n \rangle \geq \delta \cdot \|y'_n\| \cdot \|x_n\| \geq \frac{\delta \cdot \|y'\|}{2},$$

ha $n > N_0$ ($y'_n \rightarrow y'$).

A nullához tartással az a probléma, hogy bár $\|x_n\| = 1$, az $|\langle y - y'_n; Ax_n \rangle| \leq \|y' - y'_n\| \cdot \|Ax_n\|$, ahol a második tényező nem korlátos is lehet.

2. Tétel: Legyen $A \in B \rightarrow E$ $D(A) \subset B$ altéren értelmezett zárt lineáris leképezés.

Teljesítse A az 1. tétel I. feltételét.

II. a) Létezzék egy $\|\cdot\|$ -al jelölt $\|y'\|_E, \geq \|y'\|_E, (y' \in E')$ norma, amelyre bizonyos $\bar{\delta} > 0$ esetén:

$$|\langle y'; Ax \rangle| \leq \bar{\delta} \cdot \|y'\|_E \cdot \|x\|_B.$$

II. b₁) Ha az 1. tétel II. feltételében szereplő H sűrű E' -ben a $\|\cdot\|$ normára nézve, vagy

II. b₂) Ha E reflexív, a II. a) feltétel a $\|\cdot\|$ -ra is igaz, és létezik $M \subset H$ E' -ben gyengén sűrű altér,

akkor A -nak létezik egész E -n értelmezett folytonos inverze.

Bizonyítás: Az 1. tétel I. feltételének minden következménye igaz itt is.

A II. b₂) esetén az M altér erősen is sűrű E reflexivitása miatt, hisz az E erős duálisanak is ugyanaz a duálisa, mint a gyengének, ezért a két topológiában a konvex halmazok lezárása megegyezik.

Az (1)-et így becsülhetjük:

$$\begin{aligned} \langle y'; Ax_n \rangle &\geq -|\langle y' - y'_n; Ax_n \rangle| + \langle y'_n; Ax_n \rangle \geq \\ &\geq -\delta \cdot \|y' - y'_n\| \cdot \|x_n\| + \delta \cdot \|y'_n\| \cdot \|x_n\|. \end{aligned}$$

Mivel $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$; így $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ is igaz, azért a jobb oldal első tagja 0-hoz tart, a második pedig egy pozitív számhoz, van tehát olyan n , hogy a jobb oldal pozitív, és így Ax_n -en y' nem tűnik el, azaz t_A injektív.

Következmények: 1) Lax-Milgram tétel: Legyen \mathcal{H} Hilbert tér.

Tétel: Legyen $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ zárt leképezés. Ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$\langle x; Ax \rangle \geq \delta \cdot \|x\|^2,$$

($x \in D(A) = \mathcal{H}$), akkor az A leképezésnek létezik folytonos egész \mathcal{H} -n értelmezett inverze. Ez esetben A is folytonos.

Bizonyítás: Mivel $D(A) = \mathcal{H}$, $H = \mathcal{H}$, a Riesz reprezentációs tétel alapján, és minden $y \in \mathcal{D}(A)$ -hoz létezik y' .

A folytonossága a zárt gráf tétel következménye.

Felhívjuk a figyelmet, hogy a Lax-Milgram tétel csupán elegendő feltételt ad az egész \mathcal{H} -n értelmezett folytonos inverz létezésére. Ugyanis az $\langle x; Ax \rangle \geq \delta \cdot \|x\|^2$ feltétel az A leképezés szigorú pozitív definittségét jelenti, inverze azonban más leképezésnek is létezik.

Ha a tételben A zártságát elejtjük és a II. a) feltételt feltesszük, akkor A folytonossága következik $y = Ax$ mellett az

$$\langle Ax; Ax \rangle = \|Ax\|^2 \leq \delta \cdot \|Ax\| \cdot \|x\|$$

egyenlőtlenségből természetesen, a $\|\cdot\| = \|\cdot\|$ esetben. Különben a zártság és e feltétel függetlenek.

Ha H_1, H_2 két különböző Hilbert tér, akkor módosul a helyzet.

Általában csak az 1., 2. tételt mondhatjuk ki.

A 2. tételre példaként nézzük meg a következő következményt:

2) Parciális differenciálegyenletek modern elméletében alapvető az alábbi tétel (Nagumó):

Legyenek H_1, H_2 Hilbert terek, és $i: H_1 \rightarrow H_2$ folytonos injekció, $R(i) \subset H_2$ sűrű.

Az $R(i) = \mathcal{H}_1 \subset H_2$ altéren i segítségével bevezethetünk olyan topológiát, hogy $i: H_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ homeomorfizmus legyen, ekkor H_1 -et azonosítjuk \mathcal{H}_1 -gyel, ami Hilbert tér lesz. \mathcal{H}_1 -en a skalárszorzatot $[\cdot; \cdot]$ -lel, a normát $\|\cdot\|$ -al H_2 -n megfelelően $\langle \cdot; \cdot \rangle$ – illetőleg $\|\cdot\|$ -al jelöljük.

Tétel: Az $A: H_1 \rightarrow H_2$ ($\tilde{A} \text{ def. } A \circ i^{-1}: \mathcal{H}_1 \rightarrow H_2$) leképezésnek létezik folytonos és az egész H_2 -n értelmezett inverze, ha

- 1) $D(A) \subset H_1$ sűrű, A zárt.
- 2) Létezik olyan $\delta > 0$, és $\delta > 0$, hogy $y \in D(\tilde{A})$ -ra

$$\langle y; Ay \rangle \geq \delta \cdot \|y\| \cdot \|y\|$$

$$|\langle y; Ax \rangle| \leq \bar{\delta} \cdot \|y\| \cdot \|x\|, \quad x \in D(\tilde{A}), \quad y \in \mathcal{H}_1\text{-re.}$$

Bizonyítás: Az A folytonos zárt altéren értelmezett inverze létezik, ez az első egyenlőtlenség és az 1. feltétel második felének következménye.

A második rész bizonyításához azt vegyük tekintetbe, hogy $H_2' \subset \mathcal{H}_1'$ altér, a t_i injektív volta miatt.

A $D(A) \subset \mathcal{H}_1'$ a $\|\cdot\|$ normában sűrű, tehát $\overline{D(A)} \supset H_2'$ is. Végül i folytonos, ezért $\|iy\| \leq \|y\|$, ami a kívánt egyenlőtlenséget biztosítja a normák között.

3) További alkalmazásként a spektrálméletnek az invertálható leképezések halmazára vonatkozó alapvető állításait könnyen bebizonyítjuk korlátos és nem korlátos leképezések esetére:

Tétel: Legyen $A \in B \rightarrow E$ lineáris leképezés, $D(A) \subset B$ értelmezési tartománnyal.

Feltesszük, hogy létezik A -nak egész E -n értelmezett folytonos inverze, amelynek normája $\|A^{-1}\|$. Ha $A' \in B \rightarrow E$, $D(A') \supset D(A)$ és A' folytonos, zárt leképezés, és $\|A'\| \leq \rho < \|A^{-1}\|^{-1}$, akkor $A \pm A'$ leképezésnek is létezik egész E -n értelmezett folytonos inverze.

Bizonyítás: Az A leképezés az 1) tétel valamennyi feltételét teljesíti, A^{-1} létezése folytán. Ezért elegendő $A \pm A'$ -re megmutatni, hogy a $D(A \pm A') = D(A)$ -ból vett tetszőleges x -re, ha valamely $(y'; x)$ pár $(y' \in E')$ teljesíti az I. feltételt az A leképezéssel, ugyanez a pár teljesíti ugyanazt a feltételt $A \pm A'$ -val is.

Ezt azonban így kapjuk:

$$\begin{aligned} \langle y'; (A \pm A')x \rangle &= \langle y'; Ax \rangle \pm \langle y'; A'x \rangle \geq -\|y'\| \cdot \|A'\| \cdot \\ &\cdot \|x\| + \|y'\| \cdot \frac{h}{\|A^{-1}\|} \cdot \|x\| = \left(\frac{h}{\|A^{-1}\|} - \|A'\| \right) \cdot \|y'\| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségek utolsó tagjában $1 > h > \frac{\rho}{\|A^{-1}\|^{-1}}$ esetén kapunk egy pozitív δ -t, és ezzel a tételt beláttuk.

Jelöljük $\mathcal{L}(B; E)$ -vel B -t E -re képező folytonos lineáris leképezések terét, ellátva az erős topológiával (B, E mint az 1. tételben).

Az $\mathcal{L}(B, E)$ 0 körüli ρ sugarú környezetét $G_\rho(0)$ -val jelölve, a következő három tételt mondhatjuk ki:

- 1) **Következmény:** $\mathcal{L}(B, E)$ -ben az invertálható leképezések tere az erős topológiában nyílt.
- 2) $A \in B \rightarrow E$ zárt leképezések terén (nem szükségképp vektortér), ha A invertálható, úgy, hogy $D(A^{-1}) = E$, akkor az $A + G_\rho(0)$ ($\rho < \|A^{-1}\|^{-1}$) halmaz elemei is invertálhatóak.
- 3) Egy $A \in B \rightarrow B$ zárt leképezés spektruma zárt halmaz (mivel a reguláris λ -k halmaza nyílt R_1 -ben).

Az eddigiek alapján látható, hogy általában A folytonosságát nem kell megkövetelni, és az a feltételeinkből sem következik.

A folytonosság szerepére mutat rá a következő tétel:

Legyen az 1. tételbeli $E = B_2$ Banach tér, és a $B = B_1$ ugyancsak Banach tér.

Vizsgáljuk az $A: B_1 \rightarrow B_2$ folytonos leképezést. A zárt gráf-tétel szerint A zárt is. Mivel A folytonos, a tétel II. a) feltételét nem kell megkövetelni ahhoz, hogy folytonos inverz létezzék.

3. Tétel: Ha $A: B_1 \rightarrow B_2$ folytonos leképezés, és ha minden $0 \neq x \in B_1$ mellett létezik olyan $y' \in B'_2$, hogy

$$\langle y'; Ax \rangle > 0,$$

és ha továbbá

$$H^* = \bigcup_{0 \neq x \in B_1} \{ y'; \langle y'; Ax \rangle > 0, y' \in B'_2 \} = B'_2,$$

akkor

1. vagy $R(A)$ első kategóriájú, és A^{-1} nem folytonos,

2) vagy $R(A) = B_2$, és A^{-1} folytonos.

Bizonyítás: A^{-1} létezik, ez a fenti egyenlőtlenség közvetlen következménye.

2) $H_* = B'_2$ mellett $R(A)$ sűrű B_2 -ben, mert t_A injektív.

Ekkor $A: B_1 \rightarrow B_2$ folytonos, és képe sűrű B_2 -ben. A nyílt leképezések tétele kimondja, hogy

a) $R(A)$ vagy első kategóriájú,

b) vagy $R(A) = B_2$, és A nyílt.

Ez utóbbi A^{-1} folytonosságát jelenti.

E tételt teljesítő leképezésekre nem igaz több, az első kategóriájú $R(A)$ csak további feltevással zárható ki.

Erre a következő példát nézzük:

Példa: Legyen $i: C_1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ a következő folytonos injekció:

$$f \in C_1[a, b] \text{ esetén } i(f) = f.$$

Tudjuk, $R(i)$ sűrű $C[a, b]$ -ben. Ez azt jelenti, hogy t_A injektív, és minden $f \in C_1[a, b]$ elemhez a Hahn – Banach-tétel biztosít olyan $y' \in (C[a, b])'$ -beli elemet, hogy

$$\langle y'; i(f) \rangle > 0.$$

Ugyanakkor $R(i)$ első kategóriájú, mert $G_{C_1}(0)$ C_1 -beli egységgyömb lezárása kompakt $C[a, b]$ -ben és ezért nem tartalmazhat C -beli gömböt.

$$\text{Ugyanakkor } C_1[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot G_a(0).$$

A nyílt leképezések tételével jellemezhetjük még az 1), 2) tételt kielégítő esetekben az A leképezés értelmezési tartományát is.

Ugyanis, ha a mondott tételek feltételei teljesülnek, és B, E megfelelően B_1, B_2 Banach terek, akkor $A^{-1}: B_2 \rightarrow \overline{D(A)} \subset B_1, B_2$ Banach térbe ható folytonos leképezés. A $D(A)$ -ban $R(A^{-1}) = D(A)$ sűrű, ezért a nyílt leképezések tétele szerint $D(A)$ a $\overline{D(A)}$ -ban első kategóriájú, vagy $\overline{D(A)} = D(A)$, és A folytonos.

Speciálisan, ha A nem folytonos, és $D(A)$ sűrű altér B_1 -ben, akkor $D(A)$ első kategóriájú.

Komplexifikáció (Shaefer) felhasználásával a fenti eredmények komplex terekre is érvényesek, ha a funkcionáloknál az abszolút érték a komplexeknél szokásos abszolút érték, és az első becsléseknél a funkcionálok valós részére mint valós funkcionálra adjuk a feltételeket.

I r o d a l o m

- [1] М. Нагумо: Лекции по современной теории уравнений в частных производных. МИР, Москва, 1967.
- [2] H. Schaefer: Topological Vector Spaces, THE MACMILLAN COMPANY, NEW YORK, 1966.
- [3] F. Trèves: Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, New York, 1967.
- [4] F. Trèves: Locally Convex Spaces and Linear Partial Differential Equations, Springer Heidelberg, 1967.

S u m m a r y

Generalization of the Lax-Milgram theorem

Let H be a Hilbert space, and $A \in \mathcal{L}(H, H)$,

$$(x, Ax) \geq \delta \cdot \|x\|^2, \quad \delta > 0.$$

The theorem of Lax-Milgram states that, there exists $A^{-1} \in \mathcal{L}(H, H)$.

This theorem is generalized in our paper for the case of an $A \in B \rightarrow E$ which is not necessarily a continuous but a linear mapping (where B is a Banach and E a normed space).

We are able to weaken the hypothesis of positive definiteness; and we assume that

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) \text{ there exists } y' \in E',$$

$$\langle y'; Ax \rangle \geq \delta \cdot \|x\| \cdot \|y'\|, \quad \delta > 0$$

and for $\forall y' \in E'$ there exists $x \in \mathcal{D}(A)$, satisfying the above condition. It is shown that this condition is necessary for the existence of $A^{-1} \in \mathcal{L}(E, B)$.

Р е з ю м е

Обобщение теоремы Лакса-Милграма

Пусть H гильбертово пространство и $A \in \mathcal{L}(H, H)$,

$$(x, Ax) \geq \delta \cdot \|x\|^2, \quad \delta > 0.$$

По теореме Лакса-Милграма существует $A^{-1} \in \mathcal{L}(H, H)$.

Наша статья обобщает эту теорему в случае $A \in B \rightarrow E$ не обязательно непрерывного, но линейного отображения, где B — банахово и E — нормированное пространство. Вместо положительной определенности предполагается, что

для каждого $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ существует такой $y' \in E'$

$$\text{что } \langle y'; Ax \rangle \geq \delta \cdot \|x\| \cdot \|y'\|. \quad \delta > 0$$

и, обратно, для каждого $\forall y' \in E'$ существует такой $x \in \mathcal{D}(A)$, выполняющий данное условие. Это предположение оказывается и необходимым для существования $A^{-1} \in \mathcal{L}(E, B)$.

TARTALOMJEGYZÉK

Arató Mátyás – Benczúr András:

Szimulációs eredmények az elemi Gauss folyamat paramétereinek eloszlására	3
--	---

Gyurácz Németh Teréz:

Néhány aszimmetrikus bolyongási feladat	37
---	----

Klafszky Emil:

Geometriai programozás	41
------------------------------	----

Komáromi Éva:

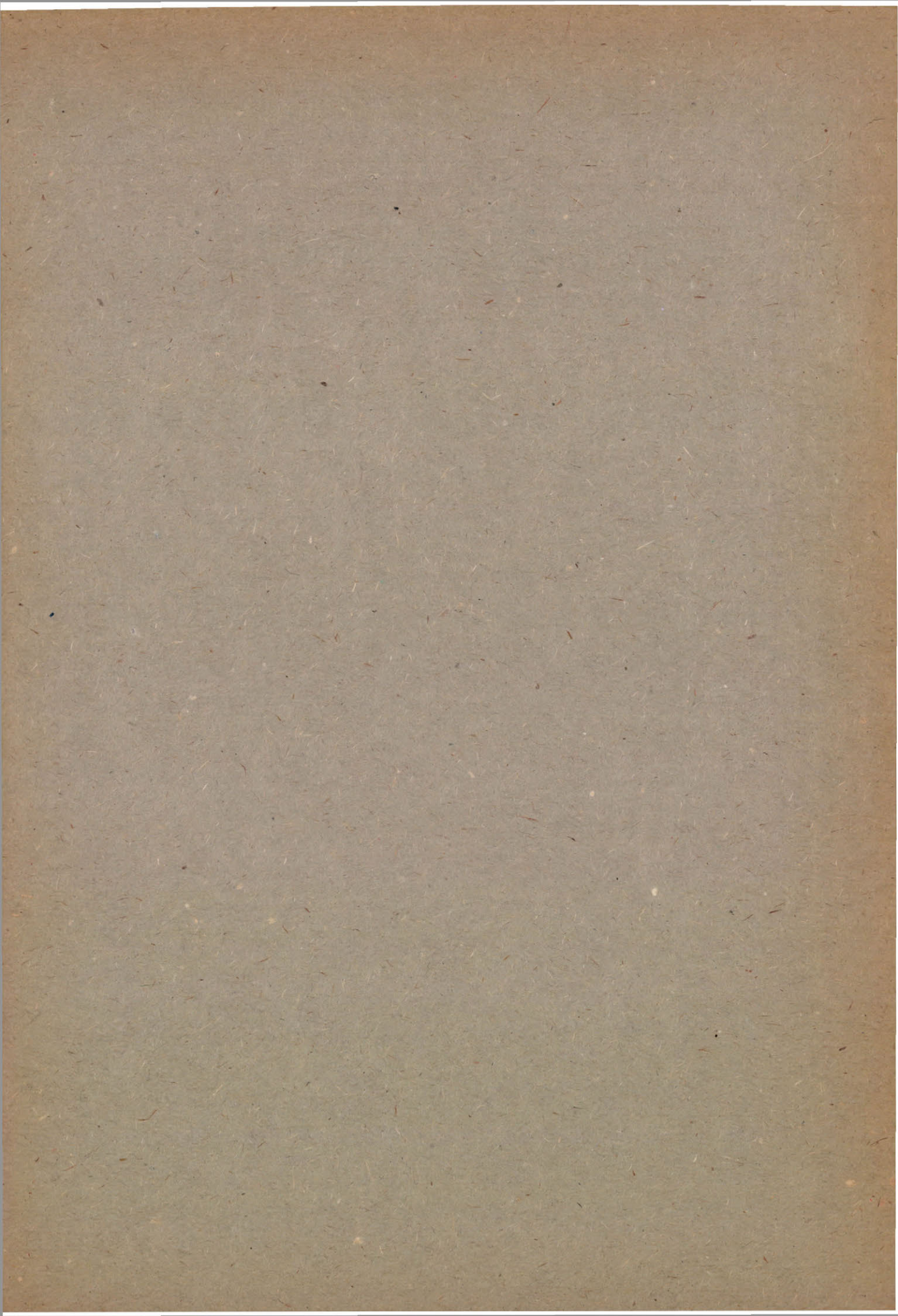
Egy véges primál algoritmus a szállítási feladat megoldására	67
--	----

Robert Kersner:

On the regularity of the solutions of the variational inequalities	81
--	----

Lipcsey Zsolt:

A Lax – Milgram-tétel általánosítása	93
--	----



6704